PSIHOLOGIE

Dumitru Gheorghiu

Statistică pentru psihologi

TREI

Editori:
SILVIU DRAGOMIR
VASILE DEM. ZAMFIRESCU

Coperta colecției:
DINU DUMBRĂVICIAN

Dtp:
CRISTIAN CLAUDIU COBAN

Descrierea CIP a Bibliotecii Naționale a României
GHEORGHIU, DUMITRU
Statistică pentru psihologi / Dumitru Gheorghiu. - București : Editura Trei, 2004
ISBN 973-707-012-7

311:159.9

Copyright © *Editura Trei, 2004*

C.P. 27-40, București
Tel./Fax: +4 021 300 60 90, +4 021 311 75 89
e-mail: office@edituratrei. ro
www.edituratrei.ro

ISBN 973-707-012-7

Cuprins

1. Introducere 9
1.1. Rolul statisticii în cercetarea psihologică 10
1.2. Matematica de bază 12
1.2.1. Operații aritmetice de bază 12
1.2.2. Operații aritmetice cu numere reale 12
1.2.3. Proprietăți ale numerelor reale 14
1.2.4. Indicatori speciali ai operațiilor aritmetice 14
1.3. Statistici descriptive și statistici inferențiale 16
1.4. Niveluri de măsură 17
1.4.1. Nivelul nominal 17
1.4.2. Nivelul ordinal 19
1.4.3. Nivelul de interval 20
1.4.4. Nivelul de raport 21
Glosar 23

2. Prezentarea datelor statistice 24
2.1. Procente și proporții 24
2.2. Raporturi și rate 28
2.3. Distribuții de frecvențe 29
2.4. Diagrame și grafice 37
Glosar 44

3. Mărimile tendinței centrale și ale dispersiei 45
3.1. Mărimile tendinței centrale 45
3.1.1. Media aritmetică 45
3.1.2. Mediana 49
3.1.3. Modul 52
3.1.4. Distribuții simetrice și distribuții asimetrice 53
3.1.5. Media aritmetică ponderată 56
3.1.6. Mărimile tendinței centrale pentru date grupate 57
Mediana pentru date grupate 60
Intervalul modal 63
3.2. Percentile 63
3.3. Mărimile dispersiei 68

3.3.1. Indicele variației calitative....69
3.3.2. Amplitudinea și amplitudinea intercuartilică 71
3.3.3. Abaterea medie și varianța 73
3.3.4. Abaterea standard și coeficientul de variație....76
3.3.5. Calculul abaterii standard pentru date grupate....78
Glosar 81

4. Distribuția normală 82
4.1. Caracteristicile distribuției normale 82
4.2. Calculul scorurilor standard 83
4.3. Distribuția normală standard 85
4.4. Utilizarea distribuției normale standard 87
4.4.1. Determinarea procentelor de cazuri 88
4.4.2.. Determinarea probabilităților pentru scoruri 91
Glosar 93

5. Eșantionarea și distribuții de eșantionare 94
5.1. Procedee de eșantionare aleatorie....95
5.2. Distribuția de eșantionare 98
5.3. Determinarea probabilităților pentru medii aritmetice....101
5.4. Strategia inferențială....102
Glosar 103

6. Proceduri de estimare statistică....104
6.1. Caracteristici ale estimatorilor....104
6.2. Estimarea mediei aritmetice când σ este cunoscut....107
6.3. Estimarea mediei aritmetice când σ este necunoscut
Distribuția *t*–student 111
6.4. Estimarea proporțiilor....116
6.5. Dimensiuni ale eșantioanelor și niveluri de precizie....118
6.5.1. Controlul mărimii intervalului estimat....118
6.5.2. Determinarea dimensiunii eșantionului pentru
estimarea mediilor aritmetice....120
6.5.3. Determinarea dimensiunii eșantionului pentru estimarea
proporțiilor 121
Glosar 124

7. Testarea ipotezelor despre o singură populație....125
7.1. Testul scorurilor Z pentru medii aritmetice când σ este cunoscut .126

7.2. Erori în testarea ipotezelor 133
7.3. Testarea ipotezelor pentru medii aritmetice când σ este necunoscut 135
7.4. Testul scorurilor *Z* pentru proporții 138
Glosar 140

8. Testarea ipotezelor despre diferențele dintre două populații 141
8.1. Testul scorurilor *Z* pentru diferența dintre două medii aritmetice 142
8.2. Testul scorurilor *T* pentru diferența dintre două medii aritmetice 145
8.3. Testul scorurilor *Z* pentru diferența dintre două proporții 148
Glosar 151

9. Analiza de varianță (ANOVA) 152
9.1. ANOVA pentru o variabilă independentă 152
9.2. ANOVA pentru două variabile independente 160
Glosar 174

10. Teste nonparametrice 175
10.1. Testul chi-pătrat (χ^2) 175
10.1.1. Testul chi-pătrat pentru independență 176
10.1.2. Testul chi-pătrat pentru concordanță 181
10.2. Testul Mcnemar 185
10.3. Testul Mann-Whitney *U* 187
10.4. Testul medianei 192
10.5. Testul iterațiilor 195
10.6. Testul Wilcoxon *T* 199
10.7. Testul Kruskal–Wallis *H* 202
Glosar 206

11. Mărimi ale corelației 208
11.1. Noțiunea de corelație 209
11.2. Mărimi ale corelației la nivel nominal 214
11.3. Mărimi ale corelației la nivel ordinal 218
11.4. Mărimi ale corelației la nivel de interval sau de raport 228
11.5. Elemente de analiză multivariată 236
11.5.1. Corelația parțială 236
11.5.2. Regresia multiplă 239

11.5.3. Corelația multiplă 243
Glosar 245

12. Introducere elementară în SPSS 246

Exerciții și probleme 281
1. Introducere 281
2. Prezentarea datelor statistice 282
3. Mărimile tendinței centrale și ale dispersiei 284
4. Distribuția normală 287
5. Eșantionare și distribuții de eșantionare 289
6. Proceduri de estimare statistică 289
7. Testarea ipotezelor despre o singură populație 290
8. Testarea ipotezelor despre diferențele dintre două populații 292
9. Analiza de varianță 295
10. Teste nonparametrice 299
11. Mărimi ale corelației 304
Soluții și indicații de rezolvare 313

Anexe 323

1

INTRODUCERE

Dicționarul explicativ al limbii române consemnează mai multe înțelesuri ale cuvântului *statistică*. Unul dintre acestea este „evidență numerică referitoare la diverse fenomene“. La sfârşitul unei transmisiuni televizate a unui meci de fotbal, de pildă, ni se prezintă o „statistică“ privind numărul de şuturi pe poartă, numărul de cornere, numărul de cartonaşe galbene şi roşii etc. Într-un alt înțeles al acestui cuvânt, statistica este o ramură a matematicii, numită adesea *statistică teoretică* sau chiar *statistică matematică*, al cărei obiect de studiu îl reprezintă elaborarea unor metode matematice de analiză a aşa-numitelor „fenomene de masă“, indiferent de natura acestora. Cercetătorii din domeniul ştiințelor omului şi ale naturii vorbesc despre statistică într-un fel diferit, dar legat de primele două înțelesuri menționate, având în vedere *aplicarea* unor metode statistice pentru prezentarea şi interpretarea rezultatelor unor investigații specifice.

În această carte se prezintă, în principal, *statistica aplicată în psihologie.* După evidențierea rolul statisticii în cercetarea psihologică, se trec în revistă câteva operații matematice de bază, necesare pentru a înțelege statistica. În restul acestui capitol sunt introduse câteva noțiuni fundamentale, folosite în statistică.

1.1. ROLUL STATISTICII ÎN CERCETAREA PSIHOLOGICĂ

Pentru psiholog şi, în general, pentru cercetătorul în domeniul ştiințelor omului, **statistica** este un set de metode şi tehnici matematice de organizare şi prelucrare a datelor, folosite cu scopul de a răspunde la anumite întrebări şi de a testa anumite ipoteze. **Datele** sunt informații, în principal numerice, care reprezintă anumite caracteristici. De pildă, dacă dorim să cunoaştem nivelul de anxietate al unui grup, datele pot fi *scoruri* pe o scală de anxietate, iar tehnicile statistice ne ajută să descriem şi să înțelegem aceste scoruri.

Ştiințele omului folosesc o mare cantitate de date pentru testarea ipotezelor şi formularea unor teorii. Este important de subliniat, însă, că strângerea datelor nu este, prin sine, suficientă pentru cercetarea ştiințifică. Chiar şi cele mai obiective şi mai atent culese informații, luate ca atare, nu ne pot „spune" mare lucru. Pentru a fi utile, datele trebuie să fie organizate, evaluate şi analizate. Fără o bună înțelegere a principiilor analizei statistice şi fără o aplicare corespunzătoare a tehnicilor statistice, cercetătorul nu va putea înțelege semnificația datelor culese.

Analiza statistică este esențială în psihologie, ca şi în celelalte ştiințe ale omului. Se poate spune chiar că psihologia nu poate exista fără statistică. Pe de altă parte, rolul statisticii este limitat. Aceste trăsături pot fi explicate în raport cu cele trei etape principale ale unei cercetări. Astfel, în etapa *formulării problemei de cercetare*, cercetătorul formulează un enunț al unei probleme sau al unei întrebări la care cercetarea va încerca să dea un răspuns. Problema cercetării poate să provină din diferite surse, incluzând teorii, cercetări anterioare şi comenzi de cercetare. O dată ce a fost formulată problema cercetării, procesul intră într-o a doua etapă, în care *se iau decizii despre proiectul de cercetare şi se aleg metodele şi tehnicile de cercetare*. În această etapă, cercetătorul decide ce tipuri de cazuri vor fi incluse în cercetare, cât de multe cazuri vor fi luate în considerare şi în ce mod vor fi investigate acestea. După ce au fost investigate toate cazurile şi au fost culese toate datele relevante, statistica devine realmente şi în mod direct importantă pentru *analiza rezultatelor*. Este important de reținut că *dacă cercetătorul şi-a formulat greşit problema*

sau a proiectat greşit cercetarea, atunci cele mai sofisticate analize statistice sunt lipsite de valoare. Împrumutând un „principiu" din ştiinţa computerelor, putem spune că metodele şi tehnicile statistice se supun regulii IGIG = „introduci gunoaie, ies gunoaie". Oricât ar fi de utilă, statistica nu se poate substitui conceptualizării riguroase şi nici alcătuirii unui proiect de cercetare corespunzător problemei avute în vedere.

Multe persoane care nu sunt cercetători trebuie să fie consumatori avizaţi de rezultate de cercetare prelucrate statistic. Statistica oferă adesea suport raţional pentru decizii ale managerilor din sistemul educaţional, pentru consilierii educaţionali, pentru psihologii clinicieni şi pentru alte persoane ale căror profesii sunt legate într-un fel sau altul de ştiinţele omului. Oricare ar fi motivul pentru care se utilizează metode şi tehnici statistice, atât cercetătorii, cât şi „consumatorii" cercetărilor trebuie să înţeleagă ce fel de informaţii oferă statistica şi ce fel de concluzii pot fi trase din aceste informaţii.

În această carte, statistica va fi privită ca un set de „instrumente", indispensabil pentru creşterea cunoaşterii în ştiinţele omului, iar nu ca un scop în sine. Ca atare, acest subiect nu va fi abordat „matematic". Tehnicile statistice prezentate în capitolele care urmează sunt văzute ca instrumente folosite pentru a răspunde unor probleme de cercetare specifice psihologiei (altfel spus, această carte nu este destinată statisticianului profesionist, ci psihologului). Pe de altă parte, aceasta nu înseamnă că nu vor fi folosite anumite metode matematice. Această carte a fost scrisă cu intenţia de a furniza îndeajuns material matematic pentru a se putea înţelege ce poate face statistica şi cum face statistica ceea ce face. După ce veţi parcurge întregul material, vă veţi familiariza cu avantajele şi limitele celor mai frecvent utilizate tehnici statistice şi veţi şti care dintre acestea sunt aplicabile unei mulţimi date de informaţii şi unui scop dat al cercetării. În cele din urmă, veţi putea întreprinde singuri analize statistice de bază ale datelor strânse din cercetări proprii.

1.2. MATEMATICA DE BAZĂ

În statistică sunt folosite metode matematice, de la cele mai simple până la cele mai complexe. Înțelegerea materialului prezentat în această carte nu cere o cunoaştere avansată a matematicii, ci doar o familiarizare cu aritmetica, algebra elementară şi cu unele simboluri matematice folosite cu precădere în statistică. În această secțiune se întreprinde o scurtă trecere în revistă a unor concepte şi operații aritmetice, pe care orice cititor cu o pregătire medie în domeniul matematicii o poate neglija.

1.2.1. OPERAȚII ARITMETICE DE BAZĂ

Statistica foloseşte din plin cele patru *operații aritmetice de bază*: adunarea (+), scăderea (–), înmulțirea şi împărțirea. Rezultatul unei adunări se numeşte *sumă*, iar rezultatul operației de scădere se numeşte *diferență*. Înmulțirea a două numere poate fi denotată algebric în trei feluri: $X \cdot Y$, (X) (Y) sau pur şi simplu XY. Numerele care sunt înmulțite se numesc *factori*, iar rezultatul operației de înmulțire se numeşte *produs*. Împărțirea a două numere poate fi, de asemenea, denotată în trei feluri: $X \div Y$, X/Y sau $\frac{X}{Y}$. În notația folosită aici, X este *numărătorul*, Y fiind *numitorul*. Rezultatul operației de împărțire se numeşte *cât*.

Este important de reținut relația dintre înmulțire şi împărțire. Astfel, câtul X/Y poate fi exprimat ca produsul (X) (1/Y). De exemplu, 15/5 = (15) (1/5) = 3.

1.2.2. OPERAȚII ARITMETICE CU NUMERE REALE

În aritmetica elementară suntem familiarizați cu *numerele pozitive*, i.e. numerele mai mari sau egale cu 0. Statistica trebuie să folosească ceea ce matematicienii numesc *numere reale*. **Numerele reale** sunt toate numerele pozitive şi negative, de la $-\infty$ la $+\infty$. Astfel, numerele reale includ nu numai numerele întregi pozitive şi negative, ci şi fracțiile şi numerele zecimale.

Atunci când se folosesc atât numere pozitive, cât şi numere negative într-o operaţie aritmetică, se vorbeşte despre *numere cu semn*. Uneori este nevoie să ignorăm semnul algebric, + sau –, şi să considerăm doar **valoarea absolută** a numărului — valoarea numărului indiferent de semnul algebric. De pildă, valoarea absolută (modulul) numărului –7, notată |–7|, este 7. În valori absolute, |–7| = |+7| = 7.

Semnul algebric din faţa unui număr afectează rezultatul operaţiilor algebrice. În cele ce urmează aceste efecte vor fi urmărite pe măsură ce se expun regulile pentru operaţiile aritmetice.

Adunarea Dacă două numere au acelaşi semn, se adună valorile absolute şi se reţine semnul respectiv:

$$(-10) + (-25) = -35$$
$$(+15) + (+5) = +20$$

Dacă se adună două numere care au semne opuse, se scade valoarea absolută a numărului mai mic din valoarea absolută a celuilalt număr şi se reţine semnul numărului care are valoarea absolută mai mare:

$$(-10) + (+15) = +5$$
$$(+5) + (-25) = -20$$

Scăderea Când se scad numere, se schimbă semnul numărului de scăzut, după care se aplică regulile adunării:

$$(-10) - (+5) = (-10) + (-5) = -15$$
$$(-10) - (-25) = (-10) + (+25) = +15$$

Înmulţirea Dacă se înmulţesc două numere care au acelaşi semn, produsul este pozitiv, iar dacă se înmulţesc două numere care au semne diferite, produsul este negativ:

$$(-10)\ (-25) = +250$$
$$(-10)\ (+15) = -150$$

Împărţirea Dacă se împart două numere care au acelaşi semn, câtul este pozitiv, iar dacă se împart două numere care au semne diferite, câtul este negativ:

$$-10/-25 = +0{,}40$$
$$+15/-10 = -1{,}50$$

1.2.3. PROPRIETĂȚI ALE NUMERELOR REALE

Numerele reale au trei proprietăți importante, care sunt utilizate în formulele şi calculele statistice: *comutativitatea*, *asociativitatea* şi *distributivitatea înmulțirii fașă de adunare*.

Comutativitatea Două numere pot fi adunate sau înmulțite în orice ordine, rezultatul fiind acelaşi:

$$15 + 5 = 5 + 15 = 20$$

$$15 \cdot 5 = 5 \cdot 15 = 75$$

Asociativitatea Termenii unei adunări sau factorii unui produs pot fi grupați oricum, rezultatul fiind acelaşi:

$$-10 + (15 + 5) = (-10 + 15) + 5 = 10$$

$$(-10)\,(15 \cdot 5) = (-10 \cdot 15)\,5 = -750$$

Distributivitatea Produsul unui număr X cu suma a două numere, Y şi Z, este egal cu suma produselor lui X cu Y şi lui X cu Z:

$$5(-10 + 15) = 5(-10) + (5 \cdot 15) = 25$$

1.2.4 INDICATORI SPECIALI AI OPERAȚIILOR ARITMETICE

Doi indicatori speciali ai operațiilor aritmetice apar frecvent în statistică: *exponentul*, *radicalul* şi *operatorul însumării*. **Exponentul** indică puterea la care este ridicat un număr. Astfel, X^2 desemnează ridicarea la pătrat a numărului X sau, altfel spus, înmulțirea numărului X cu sine: $X \cdot X$, iar X^4 desemnează ridicarea la puterea a patra a numărului X: $X \cdot X \cdot X \cdot X$.

Radicalul indică extragerea rădăcinii unui număr. În statistică apare cel mai frecvent extragerea rădăcinii pătrate a unui număr. *Rădăcina pătrată* a unui număr, indicată de simbolul √, este numărul real prin a cărui ridicare la pătrat se obține numărul inițial. Astfel, $\sqrt{36} = 6$, deoarece $6^2 = 36$. Rădăcina pătrată a unui număr poate fi indicată şi prin exponentul fracțional ½. De exemplu, $\sqrt{36} = 6^{1/2} = 6$.

Operatorul însumării, simbolizat de majuscula din alfabetul grecesc *sigma*, Σ, indică însumarea a ceea ce urmează imediat în expresia respectivă. Date fiind, de pildă, numerele

$$X_1 = 3, X_2 = 7, X_3 = 4, X_4 = 2, X_5 = 8,$$

expresia $\sum_{i=1}^{5} X_i$, citită „sumă de *X* indice *i* de la *i* = 1 la 5“ stă pentru suma

$$X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 = 3 + 7 + 4 + 2 + 8 = 24$$

X_i este simbolul general pentru numerele din seria de mai sus. Notația de sub Σ, $i = 1$, indică primul număr din sumă, $X_1 = 3$, iar numărul înscris deasupra simbolului Σ arată până la al câtelea număr are loc însumarea, $X_5 = 8$. În general, expresia

$$\sum_{i=1}^{N} X_i$$

arată că însumarea începe cu primul număr din seria respectivă şi se încheie cu cel de-al *N*-lea număr. Adesea, notațiile aflate deasupra şi dedesubtul simbolului Σ sunt omise. Într-un astfel de caz, Σ indică însumarea de la primul număr până la ultimul.

Prezentăm în continuare două reguli privind operatorul însumării:

Regula 1 Rezultatul obținut prin aplicarea operatorului Σ la produsul dintre o constantă şi o serie de numere este egal cu rezultatul obținut prin înmulțirea constantei cu suma numerelor din serie. În simboluri, dacă *C* este o constantă,

$$\sum_{i=1}^{N} CX_i = C\sum_{i=1}^{N} X_i$$

Fie constanta 2 şi numerele $X_1 = 1, X_2 = 3, X_3 = 4, X_4 = 7$; atunci,

$$\sum_{i=1}^{4} 2X_i = (2 \cdot 1) + (2 \cdot 3) + (2 \cdot 4) + (2 \cdot 7) = 2 + 6 + 8 + 14 = 30$$

$$2\sum_{i=1}^{4} X_i = 2(1 + 3 + 4 + 7) = 2 \cdot 15 = 30$$

Regula 2 Rezultatul obținut prin aplicarea operatorului *Σ* la suma a două sau mai multe serii de câte *N* numere este egal cu rezultatul obținut prin aplicarea operatorului *Σ* la fiecare serie în parte şi adunarea sumelor astfel obținute. În simboluri:

$$\sum_{i=1}^{N}(X_i + Y_i) = \sum_{i=1}^{N} X_i + \sum_{i=1}^{N} Y_i$$

Fie seriile $X_1 = 2$, $X_2 = 5$, $X_3 = 3$, $X_4 = 1$ şi $Y_1 = 1$, $Y_2 = 3$, $Y_3 = 4$, $Y_4 = 7$; atunci,

$$\sum_{i=1}^{N}(X_i + Y_i) = (X_1 + Y_1) + (X_2 + Y_2) + (X_3 + Y_3) + (X_4 + Y_4) =$$

$$= (2 + 7) + (5 + 9) + (3 + 6) + (1 + 5) = 9 + 1 + 4 + 9 + 6 + = 38$$

$$\sum_{i=1}^{N} X_i + \sum_{i=1}^{N} Y_i = (X_1 + X_2 + X_3 + X_4) + (Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4) =$$

$$= (2 + 5 + 3 + 1) + (7 + 9 + 6 + 5) = 11 + 27 = 38$$

1.3. STATISTICI DESCRIPTIVE ŞI STATISTICI INFERENȚIALE

Pentru cele ce urmează, este necesar să definim termenii *variabilă*, *populație* şi *eşantion*. O **variabilă** este orice trăsătură care îşi poate schimba valoarea de la caz la caz. De pildă, trăsăturile *sex*, *vârstă* şi *venit* sunt variabile. O **populație** este un grup ce include toate cazurile de care este interesat cercetătorul. De pildă, toți cetățenii români cu drept de vot, toți studenții unei universități şi toate țările europene sunt populații în înțelesul dat acestui cuvânt în statistică. În cele mai multe situații de cercetare, populațiile sunt prea mari pentru a fi cercetate. În astfel de cazuri se selectează o submulțime strictă a populației de referință, numită **eşantion**.

Tehnicile statistice se împart în două mari clase: statistici descriptive şi statistici inferenţiale. **Statisticile descriptive** sunt utilizate pentru a prezenta, clasifica şi însuma scorurile (valorile) unei variabile. Dacă ne interesează descrierea unei singure variabile, atunci vom folosi statistici descriptive pentru a aranja şi prelucra scorurile acelei variabile, astfel încât informaţia relevantă să poată fi înţeleasă şi evaluată rapid.

Statisticile inferenţiale sunt utilizate pentru a face generalizări despre o populaţie pe baza studiului unui eşantion din acea populaţie sau, altfel spus, pentru a trage concluzii despre caracteristicile unei populaţii pe baza caracteristicilor corespunzătoare ale unui eşantion din acea populaţie.

1.4. NIVELURI DE MĂSURĂ

Orice tehnică statistică implică utilizarea unor operaţii, precum ordonarea unor cazuri sau însumarea scorurilor unei variabile. Înainte de a utiliza o tehnică statistică, este necesară măsurarea variabilei de interes într-un mod sau, altfel spus, la un *nivel de măsură* care să justifice aplicarea operaţiilor respective. De pildă, multe tehnici statistice cer adunarea scorurilor unei variabile. Aceste tehnici pot fi utilizate numai dacă variabila este măsurată într-un mod care permite operaţia matematică a adunării. Astfel, alegerea unei tehnici statistice depinde de nivelul la care a fost măsurată variabila. Nivelurile de măsură ale variabilelor sunt clasificate într-o ierarhie, în funcţie de complexitatea lor. Această ierarhie include, în ordinea crescătoare a complexităţii, nivelurile *nominal*, *ordinal*, *de interval* şi *de raport*.

1.4.1. NIVELUL NOMINAL

Măsurarea unei variabile la nivel nominal constă din clasificarea diferitelor cazuri în categoriile prestabilite ale unei variabile. La nivel nominal, clasificarea este singura procedură de măsurare permisă. Variabilele *sex*, *denominaţia religioasă* (apartenenţa religioasă declarată) şi *culoarea ochilor* sunt exemple de variabile măsurabile numai la nivel nominal. La

acest nivel categoriile nu pot fi ordonate după vreun criteriu, putând fi comparate unele cu altele exclusiv după numărul de cazuri clasificate în fiecare categorie. De pildă, dacă dorim să măsurăm denominaţia religioasă pentru un grup de persoane, prestabilim categorii precum Creştin–ortodox, Catolic, Protestant ş.a., dar nu putem ordona aceste categorii de la „superior“ la „inferior“ sau în vreun alt fel.

Criteriile (regulile) măsurării nominale corecte sunt următoarele:

Regula excluderii categoriilor Categoriile variabilei trebuie să fie reciproc exclusive, ceea ce înseamnă că nici un caz nu trebuie să facă parte din mai mult de o categorie. În raport cu această regulă, distingem două tipuri de erori: (1) cel puţin două categorii au cazuri în comun, fiecare categorie conţinând şi cazuri care nu aparţin celeilalte categorii; (2) cel puţin două categorii se află în raport de incluziune – orice caz care face parte dintr-o categorie face parte şi din cealaltă categorie, nu şi reciproc.

Regula exhaustivităţii categoriilor Trebuie să apară câte o categorie pentru fiecare manifestare a variabilei respective sau, altfel spus, fiecare caz de interes trebuie să facă parte dintr-o categorie. Având în vedere complexitatea manifestărilor variabilelor considerate în ştiinţele omului, pentru respectarea acestei reguli se obişnuieşte să se adauge o categorie „Alţii“ / „Altele“.

Regula omogenităţii categoriilor Categoriile trebuie să fie omogene în termenii proiectului de cercetare urmărit, ceea ce înseamnă că proprietăţile comune cazurilor repartizate în aceeaşi categorie trebuie să fie mai importante în raport cu scopurile cercetării decât proprietăţile care diferenţiază acele cazuri. Să presupunem, de pildă, că indivizii dintr-o colectivitate sunt clasificaţi în categoriile: *foloseşte de obicei aspirină efervescentă*, *foloseşte de obicei aspirină obişnuită*, *foloseşte uneori un tip de aspirină şi alteori celălalt tip de aspirină*, *nu foloseşte deloc aspirină*. Aceste categorii vor fi apreciate ca omogene de un distribuitor de produse farmaceutice, în timp ce un distribuitor de cafea va prefera clasificarea aceloraşi indivizi în categoriile: *consumă de obicei cafea natura-*

lă, *consumă de obicei cafea solubilă*, *consumă uneori un tip de cafea și alteori celălalt tip de cafea, nu consumă deloc cafea.*

În legătură cu măsurarea nominală, trebuie considerat și un al patrulea criteriu de acceptabilitate, conform căruia o clasificare trebuie să aibă sens teoretic sau, altfel spus, categoriile trebuie să poată fi folosite pentru explicație și înțelegere. Putem repartiza, de pildă, orice în univers în clasa bursucilor sau în clasa non-bursucilor, dar o astfel de clasificare nu ar avea nici o importanță pentru cunoaștere.

1.4.2. NIVELUL ORDINAL

În cazul măsurării la nivel ordinal, pe lângă clasificarea cazurilor în categorii, cazurile repartizate într-o categorie sau alta pot fi ordonate, comparându-le unul cu altul, de la „inferior" la „superior", în funcție de gradul calitativ în care acestea posedă trăsătura măsurată. De pildă, variabila *nivel de școlarizare* este măsurabilă la nivel ordinal. Categoriile acestei variabile sunt adesea ordonate conform următoarei scheme: 1. *nu a absolvit nici o școală*; 2. *a absolvit cel mult ciclul obligatoriu de învățământ*; 3. *a absolvit cel mult liceul*; 4. *a absolvit cel mult cursuri postliceale, neuniversitare*; 5. *a absolvit cel mult cursuri universitare*; 6. *a absolvit cursuri postuniversitare*. Aceste categorii sunt exhaustive și reciproc exclusive și pot fi comparate în termenii numărului de cazuri pe care le conțin. În plus, categoriile și cazurile individuale pot fi comparate sub aspectul trăsăturii măsurate. Putem spune, de pildă, că un individ clasificat în categoria a II-a are un nivel de școlarizare inferior unui individ clasificat în categoria a IV-a, respectiv că un individ clasificat în categoria a IV-a are un nivel de școlarizare superior unui individ clasificat în categoria a II-a.

La nivel ordinal, deși există o „distanță" între oricare două cazuri aflate în categorii diferite, această distanță nu poate fi descrisă în termeni preciși. În exemplul nostru, nu suntem îndreptățiți să spunem, de pildă, că distanța dintre un individ aflat în categoria a II-a și un individ aflat în categoria a IV-a este egală cu distanța dintre un individ aflat în categoria a IV-a și un individ aflat în categoria a VI-a și nici că un individ aflat în categoria a IV-a are un nivel de școlarizare de două ori mai mare decât un individ aflat în categoria a II-a.

Întrucât la nivel ordinal nu suntem îndreptăţiţi să presupunem că distanţele dintre cazuri sau scoruri sunt egale, iar operaţiile de adunare, scădere, înmulţire şi împărţire pot fi aplicate în mod legitim numai dacă intervalele dintre scoruri sunt egale, aceste operaţii nu pot fi aplicate variabilelor măsurate la nivel ordinal.

1.4.3. NIVELUL DE INTERVAL

În măsurarea la nivel de interval, pe lângă clasificare şi ordonare, distanţele (intervalele) dintre oricare două cazuri aflate în categorii succesive sunt egale. Cu alte cuvinte, la acest nivel variabilele sunt măsurabile în unităţi care au intervale egale. În legătură cu timbrele dintr-o colecţie, *anul emiterii* este un exemplu de variabilă măsurabilă la nivel de interval: timbrele repartizate într-o categorie sau alta pot fi numărate, se poate spune că un timbru emis, să zicem, în 1990 este mai recent decât unul emis în 1930, iar intervalele dintre două clase succesive sunt egale (un an). Pe de altă parte, deşi distanţele dintre oricare două cazuri aflate în categorii succesive sunt egale, la acest nivel nu se poate determina măsura exactă (proporţia) în care un caz aflat într-o categorie satisface trăsătura măsurată faţă de un caz aflat în altă clasă. În exemplul nostru, nu suntem îndreptăţiţi să spunem, de pildă, că un timbru emis în 1990 este de 60 de ori mai recent decât un timbru emis în 1930.

Este important de remarcat că dacă într-o măsurare de interval apare un punct zero, acesta este doar un punct de referinţă arbitrar şi nu un *punct zero natural* sau *absolut*, adică un punct care să reflecte absenţa caracteristicii măsurate. De pildă, un termometru cu lichid dilatabil (mercur, alcool etc.) măsoară temperatura pe o scală de interval (Celsius sau Fahreinheit) în care punctul zero (0°C sau 0°F) este doar unul dintre punctele de pe scala de măsură folosită şi nu indică absenţa temperaturii. Ca atare, nu suntem îndreptăţiţi să spunem, de pildă, că dacă ieri temperatura a fost de +1°C şi astăzi sunt +10°C, astăzi este de zece ori mai cald ca ieri[1].

Un exemplu de scală de interval în psihologie este dat de măsurarea unei trăsături de personalitate, precum nivelul de stabilitate emoţională.

---

[1] Această situaţie nu trebuie să fie confundată cu cea a *temperaturii Kelvin*, care este temperatura absolută a unui gaz ideal şi este determinată de „mişcarea“ moleculelor sale. Pe scala Kelvin apare punctul *zero absolut* (= –273,16°C), în care moleculele gazului sunt în „repaus“, ceea ce indică absenţa caracteristicii respective.

Nu suntem îndreptăţiţi să spunem că o persoană care a obţinut un scor de 20 pe o scală de personalitate, în privinţa acestei trăsături, este de două ori mai stabilă emoţional decât o persoană care a obţinut scorul 10, deoarece nu există un punct zero absolut care să indice absenţa trăsăturii măsurate.

La acest nivel sunt permise toate operaţiile matematice.

1.4.4. NIVELUL DE RAPORT

În măsurarea la nivel de raport, pe lângă toate trăsăturile unei măsurări de interval, se poate determina măsura exactă (proporţia) în care un caz aflat într-o categorie satisface caracteristica măsurată, în raport cu un caz aflat într-o altă categorie şi apare un punct zero natural, care reflectă absenţa caracteristicii măsurate. De pildă, înregistrarea vechimii în muncă a angajaţilor unei firme în ani împliniţi produce date de raport, deoarece unitatea de măsură determină intervale egale, suntem îndreptăţiţi să spunem că un angajat cu 10 ani de vechime în muncă, să zicem are o vechime de două ori mai mare decât un angajat cu cinci ani de vechime în muncă şi există un punct zero natural (0 ani vechime în muncă). *Venitul*, *numărul de copii* şi *numărul de ani de căsnicie* sunt alte exemple de variabile măsurabile la nivel de raport.

Nivelul de măsură al variabilei (variabilelor) de interes reprezintă un criteriu necesar (nu şi suficient) de selecţie a tehnicilor statistice. De pildă, calcularea mediei aritmetice este justificată numai pentru variabilele măsurate la nivelele de interval şi de raport, deoarece media aritmetică a unei mulţimi de date impune *adunarea* tuturor datelor respective şi *împărţirea* sumei astfel obţinute la numărul total de date.

De notat că în psihologie este uneori dificil de a stabili dacă o variabilă a fost măsurată la nivel ordinal sau la nivel de interval. Într-un astfel de caz, este util să se presupună că variabila a fost măsurată la nivel de interval, căci acest nivel permite aplicarea unor tehnici statistice mai sofisticate decât cele permise la nivel ordinal. O decizie de acest fel, însă, nu este lipsită de riscuri. În anumite situaţii este nevoie să se dovedească faptul că analiza statistică respectivă este corectă, de pildă prin analize separate ale datelor la ambele nivele de măsură şi compararea rezultate-

lor. Dacă rezultatele astfel obținute sunt substanțial diferite, supoziția măsurării la nivel de interval trebuie să fie abandonată.

*

* *

Stimulat de predarea statisticii la Facultatea de Psihologie a Universității *Titu Maiorescu*, am conceput această carte ca o introducere clară şi concisă în statistica aplicată în psihologie. Măsura în care am reuşit îndeplinirea acestui obiectiv o va da, fireşte, cititorul. Pentru aprofundarea unor concepte şi metode statistice prezentate aici, recomand cu deosebire următoarele lucrări, din care am preluat multe exemple de analiză statistică: Joseph F. Healey, *Statistics: A Tool for Social Research*, Belmont, California, Wadsworth Publishing Company, 1984; Dennis E. Hinkle, William Wiersma şi Stephen G. Jurs, *Applied Statistics for the Behavioral Sciences*, Boston, Houghton Mifflin Company, 1988; Gerald Keller şi Brian Warrack, *Essentials of Business Statistics*, Belmont, California, Wadsworth Publishing Company, 1991; Leon F. Marzillier, *Elementary Statistics*, Wm. C. Brown Publishers, 1990.

GLOSAR

Date: informații, în principal numerice, care reprezintă anumite caracteristici.

Eşantion: o submulțime strictă a unei populații.

Nivel de măsură: ansamblu de proprietăți matematice ale unei variabile, determinat de procesul prin care variabila a fost măsurată.

Populație: grup care include toate cazurile de care este interesat cercetătorul.

Statistica: set de metode şi tehnici matematice de organizare şi prelucrare a datelor folosite cu scopul de a răspunde la anumite întrebări şi de a testa anumite ipoteze.

Statistici descriptive: tehnici statistice utilizate pentru a prezenta, clasifica şi însuma scorurile (valorile) unei variabile.

Statistici inferențiale: tehnici statistice utilizate pentru a face generalizări despre o populație pe baza studiului unui eşantion din acea populație sau, altfel spus, pentru a trage concluzii despre caracteristicile unei populații prin caracteristicile corespunzătoare ale unui eşantion din acea populație.

Variabilă: orice trăsătură care îşi poate schimba valoarea de la caz la caz.

2

PREZENTAREA DATELOR STATISTICE

Funcția de bază a statisticii descriptive este prezentarea clară şi concisă a rezultatelor cercetării. În acest capitol sunt expuse o serie de tehnici de organizare şi prezentare rezumativă a datelor: procente, proporţii, rapoarturi, rate, distribuţii de frecvenţe, diagrame şi grafice.

2.1. PROCENTE ŞI PROPORȚII

Imaginaţi-vă că sunteţi şeful unui departament al unei mari companii de asigurări şi că, dorind să prezentaţi directorului executiv al companiei o problemă de personal cu care vă confruntaţi, îi spuneţi următoarele: „Oamenii din departamentul meu nu sunt suficient de bine plătiţi. Deşi din cei 154 de angajaţi permanenţi ai companiei numai 37 sunt în departamentul meu, din cele 17 832 de contracte de asigurare încheiate în companie anul trecut, 7 321 au fost aduse de angajaţii din departamentul pe care îl conduc“. Probabil că după o astfel de prezentare, directorul executiv ar schiţa o grimasă de plictiseală şi ar amâna elegant discuţia pentru o dată neprecizată. Întrucât este vorba de compararea a câte două numere (personalul departamentului faţă de numărul total de angajaţi ai companiei şi volumul de muncă din departament faţă de volumul total de muncă din companie pe timp de un an), procentele şi proporţiile ar fi fost modalităţi mai convingătoare de prezentare a informaţiei.

Definiţiile matematice ale **proporţiei** şi **procentului** sunt următoarele:

Formula 2.1 $$Proporție\ (p) = \frac{f}{n}$$

Formula 2.2 $$Procent\ (\%) = \frac{f}{n} \cdot 100$$

în care f = frecvența sau numărul de cazuri în fiecare categorie n = numărul total de cazuri (numărul de cazuri din toate categoriile).

Următorul tabel ilustrează calcularea proporțiilor şi procentelor:

Tabelul 2.1. Opinia față de interzicerea fumatului în locurile publice (date fictive)

Opinia	Frecvența (f)	Proporția p	Procentul %
Acord	167	0,621	62,1
Dezacord	72	0,268	26,8
Nu ştiu/Nu răspund	30	0,111	11,1
TOTAL	269	1,000	100,0

Pentru a afla proporția cazurilor din prima categorie (*De acord cu interzicerea fumatului în locurile publice*), notăm că avem aici 167 de cazuri (f = 167) față de 269 de cazuri în eşantion (n = 269). Astfel:

$$Proporție\ (p) = \frac{f}{n} = \frac{167}{269} = 0,621$$

Procedând la fel, aflăm proporțiile cazurilor din celelalte categorii. Rezultatele pot fi exprimate sub formă de procente. Astfel, procentul de cazuri din cea de-a treia categorie (*Nu ştiu/Nu răspund*) este

$$Procent\ (\%) = \frac{f}{n} \cdot 100 = \frac{30}{269} \cdot 100 = 11,1\%$$

Exprimarea rezultatelor prin procente şi proporţii este cu deosebire utilă atunci când dorim să comparăm grupuri de mărimi diferite. Să presupunem, de pildă, că am adunat următoarele date privind două universităţi:

Tabelul 2.2. Numărul de studenţi înscrişi pe specializări la două universităţi (date fictive)

Specializarea	Universitatea *A*	Universitatea *B*
Drept	103	312
Ştiinţe Economice	82	279
Psihologie	137	188
Sociologie	93	217
TOTAL	415	996

Întrucât numărul total de studenţi înscrişi diferă mult de la o universitate la alta, compararea numărului relativ de studenţi înscrişi pe specializări la cele două universităţi este greu de făcut numai pe baza frecvenţelor. Care universitate, de pildă, are cel mai mare număr relativ de studenţi înscrişi la specializarea Psihologie? Pentru a înlesni comparaţiile de acest fel, calculăm procentele de studenţi înscrişi pe specializări la cele două universităţi:

Tabelul 2.3. Procentul de studenţi înscrişi pe specializări la două universităţi (date fictive)

Specializarea	Universitatea *A* (%)	Universitatea *B* (%)
Drept	24,8	31,3
Ştiinţe economice	19,8	28,0
Psihologie	33,0	18,9
Sociologie	22,4	21,8
TOTAL	100,0	100,0
	(415)	(996)

Procentele prezentate în acest tabel permit identificarea atât a diferenţelor, cât şi a asemănărilor dintre cele două universităţi. De pildă, Univer-

sitatea *A* are un procent mai mare de studenţi înscrişi la specializarea Psihologie, deşi numărul absolut de studenţi înscrişi la acest profil este mai mic decât la Universitatea *B*, iar la specializarea Sociologie, procentele sunt aproape aceleaşi.

Remarcaţi că sub fiecare coloană de procente am menţionat totalul în date absolute sau, altfel spus, am menţionat dimensiunea eşantionului. În general, dacă nu se menţionează baza de comparaţie, atunci procentele şi proporţiile nu ne spun nimic sau chiar ne pot induce în eroare. Să presupunem, de pildă, că o firmă care produce băuturi răcoritoare anunţă că ultimul său produs are cu 20% mai puţine calorii. Problema este: 20% mai puţin *faţă de ce*? Fără menţionarea bazei de comparaţie, pretenţia firmei respective este lipsită de sens. Unele reclame impresionează prin prezentarea unor proporţii, cum ar fi „Două din trei persoane preferă marca *X* de produs mărcii *Y*". Ce aţi gândi despre o astfel de reclamă, dacă aţi afla că, de fapt, au fost chestionate doar trei persoane? Cunoştinţele de statistică îşi dovedesc utilitatea şi în mai buna înţelegere şi evaluare a informaţiilor „statistice" prezentate în presa scrisă sau pe posturile de radio şi televiziune.

O eroare care poate să apară în folosirea procentelor constă din încercarea de a aduna procentele ca şi cum ar fi numere cardinale. Să presupunem, de pildă, că producătorul naţional de energie electrică anunţă creşterea preţului pe kilowatt cu 50%. Pentru „justificarea" acestei creşteri, producătorul arată că au crescut costurile de producţie a energiei electrice, după cum urmează: preţul combustibilului folosit în termocentrale cu 10%, costurile investiţiilor în retehnologizare cu 20% şi cheltuielile cu forţa de muncă cu 10%, în total, o creştere a costurilor cu 50%. O astfel de justificare este greşită. Doar o creştere cu 50% a *tuturor* costurilor ar justifica o creştere cu 50% a preţului pe kilowatt.

Revenind la exemplul dat la începutul acestei secţiuni, informaţia prezentată directorului executiv al companiei ar fi fost mai convingătoare dacă i-aţi fi spus: „Deşi în departamentul meu lucrează doar 24% din angajaţii companiei, oamenii mei au adus 41% din contractele de asigurare încheiate anul trecut în companie".

2.2. RAPORTURI ŞI RATE

Să considerăm din nou tabelul 2.2. Cât de mulţi studenţi sunt înscrişi la Ştiinţe economice în comparaţie cu cei înscrişi la Psihologie în Universitatea *B*? Putem folosi frecvenţele pentru a răspunde la această întrebare, dar un răspuns mai uşor de înţeles poate fi dat folosind un raport. **Raporturile** se calculează împărţind frecvenţa cazurilor dintr-o categorie la frecvenţa cazurilor din altă categorie, permiţând astfel compararea categoriilor în termeni de *frecvenţă relativă*. Definiţia matematică a raportului este următoarea:

Formula 2.3 $$Raport = \frac{f_i}{f_j}$$

în care f_i = numărul de cazuri din categoria *i*;

f_j = numărul de cazuri din categoria *j*.

Raportul ne spune exact în ce măsură categoria *i* depăşeşte în număr de cazuri categoria *j*. În exemplul nostru, raportul studenţilor înscrişi la Ştiinţe Economice faţă de cei înscrişi la Psihologie în Universitatea *B* este:

$$Raport = \frac{f_i}{f_j} = \frac{279}{188} = 1{,}48.$$

Aceasta înseamnă că pentru fiecare student înscris la Psihologie există 1,48 studenţi înscrişi la Ştiinţe economice.

Raporturile pot fi multiplicate cu 100 pentru a elimina virgulele. Astfel, raportul calculat mai sus poate fi prezentat ca 148, ceea ce înseamnă că pentru fiecare 100 de studenţi înscrişi la Psihologie există 148 de studenţi înscrişi la Ştiinţe economice.

Ratele se calculează împărţind numărul de cazuri reale (efective) la numărul de cazuri posibile pentru variabila de interes pe o anumită unitate de timp. De pildă, rata brută a natalităţii pentru o populaţie se calculează împărţind numărul de născuţi vii la numărul total de persoane din acea populaţie pe an, câtul astfel obţinut fiind înmulţit cu 1 000. Se spune că rezultatul este exprimat în *promile* ($^0/_{00}$). Dacă, de pildă, într-un oraş cu

7 000 de locuitori s-au înregistrat într-un anumit an 100 de născuţi vii, rata brută a natalităţii este:

$$\textit{Rata brută a natalității } (^0/_{00}) = \frac{100}{7000} \cdot 1000 = 0{,}0143 \cdot 1000 = 14{,}3\ ^0/_{00}.$$

Aceasta înseamnă că pentru fiecare mie de locuitori au fost în acel an 14,3 născuţi vii.

Ca modalităţi de a exprima *frecvenţe relative*, procentele, proporţiile, raporturile şi ratele sunt utile în special atunci când dorim să comparăm diferite grupuri sau/şi acelaşi grup în momente diferite.

2.3. DISTRIBUŢII DE FRECVENŢE

O **distribuţie de frecvenţe** este o dispunere a valorilor unei variabile care arată câte cazuri sunt conţinute în fiecare categorie a variabilei respective. Construirea unei distribuţii de frecvenţe este, de regulă, primul pas în orice analiză statistică. Să presupunem că următoarele date reprezintă scorurile obţinute de 180 de subiecţi la un test de cunoştinţe:

Tabelul 2.4. Scoruri obţinute la un test de cunoştinţe

68	52	69	51	43	36	44	35	54	57	55	56
55	54	54	53	33	48	32	47	47	57	48	56
65	57	64	49	51	56	50	48	53	56	52	55
42	49	41	48	50	24	49	25	53	55	52	56
64	63	63	64	54	45	53	46	50	40	49	41
45	54	44	55	63	55	62	56	50	46	49	47
56	38	55	37	68	46	67	45	65	48	64	49
59	46	58	47	57	58	56	59	60	62	59	63
56	49	55	50	43	45	42	46	53	40	52	41
42	33	41	34	56	32	55	33	40	45	39	46
38	43	37	44	54	56	53	57	57	46	56	45
50	40	49	39	47	55	46	54	39	56	38	55
37	29	36	30	37	49	36	50	36	44	35	45
42	43	41	42	52	47	51	46	63	48	62	49
53	60	52	61	49	55	48	56	38	48	37	47

Datele brute din tabelul 2.4 sunt greu de urmărit şi greu de înţeles. Sub supoziţia că este vorba despre date de interval, putem construi o distribuţie de frecvenţe listând scorurile *diferite* în ordine crescătoare şi înregistrând frecvenţa de apariţie a fiecărui scor. Distribuţia de frecvenţe astfel obţinută este următoarea:

Tabelul 2.5. Distribuţia de frecvenţe a scorurilor obţinute la un test de cunoştinţe

Scorul	*f*	Scorul	3	Scorul	*f*
24	1	40	4	56	14
25	1	41	5	57	6
26	0	42	5	58	2
27	0	43	4	59	3
28	0	44	4	60	2
29	1	45	7	61	1
30	1	46	9	62	3
31	0	47	7	63	5
32	2	48	8	64	4
33	3	49	11	65	2
34	1	50	7	66	0
35	2	51	3	67	1
36	4	52	6	68	2
37	5	53	7	69	1
38	4	54	7		
39	3	55	12		

De notat că această distribuţie de frecvenţe redă şi informaţia conform căreia în eşantionul considerat nu au fost obţinute scorurile 26, 27, 28, 31 şi 66, aflate între cel mai mic scor şi cel mai mare scor.

În distribuţia de frecvenţe din tabelul 2.5 am inclus *toate* scorurile diferite cuprinse între cel mai mic scor şi cel mai mare scor. Cu alte cuvinte, am clasificat datele într-un număr de grupuri sau *clase* egal cu numărul de scoruri distincte. După cum arată şi acest exemplu, construirea unei distribuţii în acest fel are drept rezultat o listă destul de lungă şi nu tocmai clarificatoare. Atunci când numărul de scoruri distincte este mare,

se optează pentru o prezentare mai compactă (mai puțin detaliată) a datelor, prin gruparea acestora în categorii mai largi, care, în cazul datelor de interval sau de raport, se numesc **intervale de clasă**. În tabelul 2.6 se prezintă o distribuție de frecvențe pentru datele din tabelul 2.4, în care apar 10 intervale de clasă, mărimea fiecărui interval fiind egală cu 5 unități. Adăugând şi o coloană de procente pentru scorurile din fiecare categorie față de numărul total de scoruri vom spori claritatea prezentării.

Tabelul 2.6. Distribuția de frecvențe a scorurilor obținute la un test de cunoştințe
(mărimea intervalului = 5)

Intervale de clasă	*f*	%
20–24	1	0,56
25–29	2	1,11
30–34	7	3,89
35–39	18	10,00
40–44	22	12,22
45–49	42	23,33
50–54	30	16,67
55–59	37	20,56
60–64	15	8,33
65–69	6	3,33
TOTAL	180	100,0

Distribuția de frecvențe din tabelul 2.6 evidențiază predominanța relativă a scorurilor din intervalele 45–49 (23,33%) şi 55–59 (20,56%). Pe de altă parte, gruparea scorurilor în acest tabel conduce la o pierdere de informație față de prezentarea din tabelul 2.5. Nu ştim, de pildă, câți subiecți au obținut, respectiv, scorurile 35, 36, 37, 38 şi 39, ci doar că sunt 18 scoruri în intervalul 35–39. Apoi, din tabelul 2.6 nu reiese că în eşantionul considerat nu au fost obținute scorurile 26, 27, 28, 31 şi 66. Să mai notăm că, la rigoare, se poate spune că în distribuția de frecvențe din tabelul 2.4, mărimea fiecărui interval este egală cu o unitate.

În general, regulile de construire a unei distribuții de frecvențe pentru date de interval sau de raport în care se utilizează intervale de clasă de mărime diferită față de datele inițiale sunt următoarele:

1. Se decide asupra *numărului de intervale de clasă* care vor fi utilizate. Numărul de intervale de clasă nu trebuie să fie atât de mare încât să nu permită sesizarea predominanței relative a anumitor grupări de scoruri, dar nici atât de mic încât să conducă la pierderea unor informații semnificative. De regulă, se utilizează între 5 şi 20 de intervale, în funcție de numărul de scoruri din mulțimea inițială de date şi de scopurile cercetării.
2. În funcție de numărul de intervale de clasă ales, se stabileşte *mărimea intervalelor de clasă*. În mod obişnuit, pentru a se înlesni interpretarea distribuției de frecvențe, se folosesc intervale de clasă de aceeaşi mărime. Mărimea unui interval de clasă se stabileşte împărțind diferența dintre cel mai mare scor şi cel mai mic scor din mulțimea scorurilor date, numită *amplitudine* a mulțimii respective[2], la numărul intervalelor de clasă şi rotunjind rezultatul până la un număr întreg convenabil.
3. Se stabileşte primul interval astfel încât să conțină cel mai mic scor (limita sa inferioară să fie mai mică sau egală cu cel mai mic scor). Ultimul interval va fi acela care conține cel mai mare scor. Intervalele nu trebuie să se suprapună.
4. Se numără scorurile din fiecare interval de clasă şi se înregistrează rezultatele într-o coloană etichetată f („frecvența“). La sfârşitul acestei coloane se prezintă numărul total de scoruri. Pentru mai multă claritate, se poate adăuga o coloană de procente.

Să vedem cum au fost aplicate aceste reguli pentru construirea distribuției de frecvențe din tabelul 2.6. Scorul cel mai mare şi scorul cel mai mic fiind, respectiv, 69 şi 24, amplitudinea scorurilor este $69 - 24 = 45$. Alegând un număr de 10 intervale de clasă, mărimea fiecărui interval de clasă este $45 \div 10 = 4{,}5 \approx 5$. Primul interval, care trebuie să includă cel mai mic scor, poate fi oricare dintre următoarele:

20–24, 21–25, 22–26, 23–27, 24–28

---

[2] Vezi capitolul 3, §§ 3.3.2.

Fiecare dintre aceste intervale conține cinci scoruri[3], inclusiv scorul 24, deci poate fi ales. În exemplul nostru am ales intervalul 20–24. Ca atare, următorul interval este 25–29 ş.a.m.d. până la ultimul interval, 65–69, care conține cel mai mare scor. De notat că intervalele din tabelul 2.5 par a nu fi reciproc exclusive. În realitate, lucrurile nu stau aşa. Dacă, după intervalul 20–24 ar fi urmat 24–28, 28–32 ş.a.m.d., am fi obținut intervale suprapuse două câte două. Scorul 24, de pildă, ar fi făcut parte atât din intervalul 20–24, cât şi din intervalul 24–28. Intervalele de clasă din tabelul 2.6 sunt exhaustive (acoperă toate scorurile din mulțimea inițială de scoruri) şi reciproc exclusive (fiecare scor face parte dintr-un singur interval).

Distribuțiile de frecvențe pentru date de interval sau de raport pot conține două instrumente ajutătoare în prezentarea datelor: frecvențe cumulate şi procente cumulate. **Frecvențele cumulate** prezintă numărul de cazuri dintr-un interval de clasă şi din toate intervalele de clasă precedente, iar **procentele cumulate** prezintă procentul de cazuri dintr-un interval de clasă şi din toate intervalele precedente[4]. Tabelul următor prezintă o coloană de frecvențe cumulate şi o coloană de procente cumulate pentru distribuția de frecvențe din tabelul 2.6.

---

[3] Aparent, fiecare interval acoperă doar patru scoruri. Pentru a vă convinge că nu este aşa, numărați-le!

[4] Considerând, atât pentru frecvențele cumulate, cât şi pentru procentele cumulate, că intervalele de clasă apar în tabel în ordine crescătoare.

Tabelul 2.7. Distribuția de frecvențe a scorurilor obținute la un test de cunoştințe

Intervale de clasă	f	fc	%	$\%c$
20–24	1	1	0,56	0,56
25–29	2	3	1,11	1,67
30–34	7	10	3,89	5,56
35–39	18	28	10,0	15,56
40–44	22	50	12,22	27,78
45–49	42	92	23,33	51,11
50–54	30	122	16,67	67,78
55–59	37	159	20,56	88,34
60–64	15	174	8,33	96,67
65–69	6	180	3,33	100,0
TOTAL	180		100,0	

Pentru a construi distribuția de frecvențe cumulate din tabelul 2.7 începem cu primul interval de clasă, 20–24. Pentru acest interval, intrarea în coloana de frecvențe cumulate este identică cu numărul de scoruri din interval, 1. Pentru intervalul imediat următor, 25–29, se adună numărul de scoruri din interval, 2, cu numărul de scoruri din primul interval, 1, obținându-se frecvența cumulată a intervalului, 3. Se procedează la fel pentru fiecare interval, adunând frecvența din intervalul respectiv cu frecvența cumulată în intervalul imediat anterior. Evident, frecvența cumulată în ultimul interval de clasă este egală cu numărul total de scoruri.

Construirea coloanei de procente cumulate urmează acelaşi model aditiv cu cel folosit pentru frecvențe cumulate. Astfel, pentru primul interval, intrarea în coloana de procente cumulate este identică cu procentul din interval. Pentru intervalul imediat următor, procentul cumulat este procentul scorurilor din interval plus procentul scorurilor din primul interval ş.a.m.d. până la ultimul interval, în care, evident, procentul cumulat este egal cu 100%. De notat că aceleaşi rezultate se obțin prin aplicarea for-

mulei 2.2, în care f se înlocuieşte cu fc pentru fiecare interval de clasă, n fiind numărul total de scoruri.

Frecvenţele şi procentele cumulate arată felul în care sunt distribuite cazurile în plaja de scoruri. De pildă, tabelul 2.7 arată că o majoritate semnificativă de subiecţi din eşantion — 122, respectiv 67,78% — au obţinut scoruri mai mici de 55.

Până acum am considerat scorurile înregistrate la testul de cunoştinţe ca fiind date discrete. Măsurarea unei variabile produce *date discrete*, dacă înregistrarea acestora se face în categorii reciproc exclusive (nesuprapuse). Pentru anumite scopuri[5], distribuţia unei variabile măsurabilă la nivel de interval sau de raport trebuie construită ca o serie *continuă* de categorii parţial suprapuse. Pentru a obţine o distribuţie continuă de scoruri ale unei astfel de variabile, se porneşte de la limitele intervalelor de clasă stabilite iniţial, numite **limite stabilite** şi, pe baza acestora, se determină aşa-numitele **limite reale** sau **exacte**. Pentru determinarea acestor limite, se împarte la doi „distanţa" aritmetică dintre intervalele de clasă stabilite iniţial, iar rezultatul astfel obţinut se scade din fiecare limită inferioară stabilită şi se adună la fiecare limită superioară stabilită. Tabelul 2.7 prezintă rezultatele aplicării aceste proceduri la intervalele de clasă stabilite în tabelul 2.5. Întrucât „distanţa" aritmetică dintre intervalele de clasă din tabelul 2.5 este de o unitate, limitele reale se află scăzând 0,5 din fiecare limită inferioară şi adunând 0,5 la fiecare limită superioară. În tabelul 2.8 este adăugată o coloană etichetată **centre de interval**. Centrele de interval sunt punctele situate exact la mijlocul unui interval şi se află împărţind la doi suma limitelor inferioară şi superioară ale intervalului[6]. De notat că centrele de interval sunt aceleaşi, indiferent dacă folosim limite stabilite sau limite reale.

---

[5] De pildă, cum vom vedea în secţiunea următoare, pentru construirea unei histograme.

[6] Centrele de interval sunt utile în construirea histogramelor.

Tabelul 2.8. Distribuția de frecvențe a scorurilor obținute la un test de cunoştințe (incluzând limite reale și centre de interval)

Intervale de clasă	Limite reale	Centre de interval	*f*
20–24	19,5–24,5	22	1
25–29	24,5–29,5	27	2
30–34	29,5–34,5	32	7
35–39	34,5–39,5	37	18
40–44	39,5–44,5	42	22
45–49	44,5–49,5	47	42
50–54	49,5–54,5	52	30
55–59	54,5–59,5	57	37
60–64	59,5–64,5	62	15
65–69	64,5–69,5	67	6
TOTAL			180

Se poate observa că intervalele de clasă cu limite reale se suprapun parțial două câte două, astfel încât distribuția apare ca fiind continuă.

Distribuțiile de frecvențe se pot construi şi pentru variabile măsurate la nivelurilele nominal sau ordinal. Pentru fiecare categorie a variabilei respective se numără cazurile şi se prezintă subtotalurile, precum şi numărul total de cazuri (*n*). Să presupunem, de pildă, că suntem interesați de măsurarea variabilei *nivel de şcolarizare* pentru cei 180 de subiecți care au răspuns la un test de cunoştințe şi că decidem să folosim următoarea scală ordinală de măsură: 1. *nu a absolvit nici o şcoală*; 2. *a absolvit cel mult ciclul obligatoriu de învățământ*; 3. *a absolvit cel mult liceul*; 4. *a absolvit cel mult cursuri postliceale, neuniversitare*; 5. *a absolvit cel mult cursuri universitare*; 6. *a absolvit cursuri postuniversitare*. Folosind numerele de ordine ale categoriilor drept coduri (etichete), tabelul 2.9 ilustrează construirea unei distribuții de frecvențe pentru variabila menționată.

Tabelul 2.9. Nivelul de şcolarizare pentru cei 180 de subiecţi

Nivel de şcolarizare	*f*	%
1	0	0
2	61	33,89
3	82	45,56
4	24	13,33
5	7	3,89
6	6	3,33
TOTAL	180	100,0

Adăugarea unei coloane de procente pentru categorii aduce un spor de claritate a prezentării. De notat că la nivelurile nominal şi ordinal, frecvenţele cumulate şi procentele cumulate sunt lipsite de sens. De asemenea, întrucât la aceste niveluri categoriile sunt întotdeauna discrete, nu are sens să se determine limitele de clasă reale şi centrele de interval. Singura coloană care poate fi adăugată la distribuţiile de frecvenţe pentru variabile la orice nivel de măsură este coloana de procente.

2.4. DIAGRAME ŞI GRAFICE

Diagramele şi graficele sunt modalităţi de prezentare vizuală a datelor statistice şi furnizează o imagine globală a formei unei distribuţii. Alegerea unei modalităţi sau a alteia depinde, în principal, de nivelul de măsură folosit şi de scopurile cercetării.

Diagrame circulare

O **diagramă circulară** este pur şi simplu un cerc împărţit într-un număr de sectoare egal cu numărul de categorii ale variabilei de interes, mărimea fiecărui sector fiind proporţională cu procentajul de cazuri din categoria respectivă. Diagramele circulare pot fi folosite pentru variabile măsurate la nivelurile nominal şi ordinal.

Să presupunem că am înregistrat statusul marital al celor 180 de subiecți care au răspuns la un test de cunoştințe şi că am obținut următoarele date:

Tabelul 2.10. Statusul marital pentru cei 180 de subiecți

Status marital	*f*	%
Celibatar*	63	35,0
Căsătorit	90	50,0
Divorțat	27	15,0
TOTAL	180	100,0

*Persoană care nu a fost niciodată căsătorită

Să construim o diagramă circulară pentru datele din acest tabel. Întrucât circumferința unui cerc are 360^0, vom aloca 126^0 (35% din 360^0) pentru prima categorie, 180^0 (50% din 360^0) pentru cea de-a doua categorie şi 54^0 (15 % din 360^0) pentru cea de-a treia categorie. Obținem următoarea diagramă circulară:

Figura 2.1. Statusul marital al celor 180 de subiecți

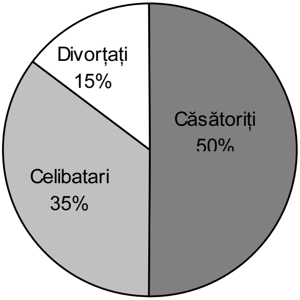


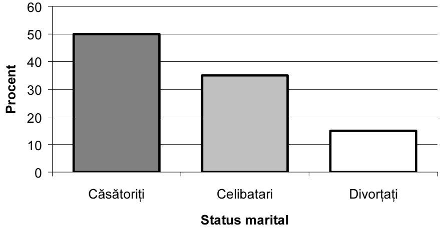
Diagrama din figura 2.1 evidențiază vizual preponderența relativă a subiecților căsătoriți şi lipsa relativă a subiecților divorțați din eşantionul considerat.

Diagrame cu coloane şi diagrame cu linii

Diagramele cu coloane reprezintă o altă modalitate de prezentare vizuală a datelor statistice. Ca şi diagramele circulare, diagramele cu coloane pot fi folosite pentru variabile măsurate la nivelurile nominal şi ordinal. Într-o astfel de diagramă, categoriile variabilei de interes apar pe o axă orizontală (axa absciselor), iar frecvențele (relative) apar pe axa verticală corespunzătoare (axa ordonatelor). Pe axa orizontală se construiesc atâtea coloane (dreptunghiuri) cu baze egale câte categorii sunt de prezentat. Înălțimea unei coloane este proporțională cu frecvența (relativă) a cazurilor din categoria respectivă. Întrucât la nivelurile nominal şi ordinal categoriile variabilelor sunt discrete, coloanele sunt separate între ele de o distanță egală, de regulă, cu ½ din lățimea lor.

Diagrama cu coloane din figura 2.2 prezintă în procente față de total statusul marital al subiecților din tabelul 2.9.

Figura 2.2. Statusul marital al celor 180 de subiecți

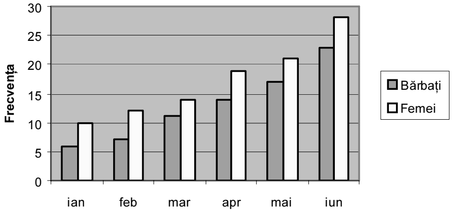


Decizia de a utiliza o diagramă circulară sau o diagramă cu coloane depinde de numărul de categorii ale variabilei de interes şi de scopul cercetării. Dacă o variabilă are mai mult de şase sau şapte categorii, atunci este preferabilă o diagramă cu coloane, căci o diagramă circulară cu prea multe categorii devine prea aglomerată şi deci greu de citit.

Diagramele cu coloane sunt utile în special pentru a prezenta frecvențele (relative) pentru două sau mai multe categorii ale unei variabile, cu scopul de a face unele comparații. Să presupunem, de pildă, că dorim să

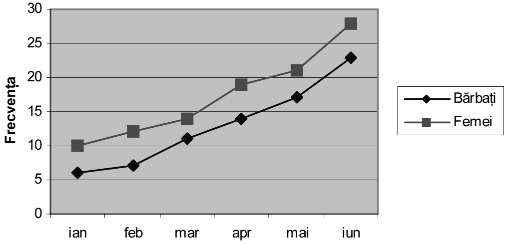
facem o comparaţie pe sexe a numărului de angajaţi ai unei firme care, în primele şase luni ale unui an, au apelat la serviciile centrului de consiliere psihologică al firmei. Figura 2.3 prezintă datele (fictive) obţinute.

Figura 2.3. Numărul de angajaţi care au apelat la serviciile centrului de consiliere psihologică



Această diagramă arată că, în timp ce numărul de angajaţi care au apelat la serviciile centrului de consiliere psihologică în perioada menţionată a fost în creştere, numărul de apelanţi femei a crescut mai repede decât numărul de apelanţi bărbaţi. Aceeaşi informaţie este prezentată printr-o **diagramă cu linii** în figura 2.4.

Figura 2.4. Numărul de angajaţi care au apelat la serviciile centrului de consiliere psihologică

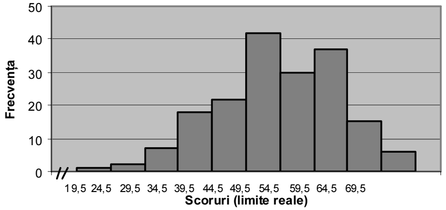


Ca şi diagramele circulare şi diagramele cu coloane, diagramele cu linii, îndeobşte cunoscute sub denumirea de „grafice“, sunt larg folosite în mass-media pentru prezentarea diferitelor date statistice.

Histograme şi poligoane de frecvenţe

Histogramele sunt modalităţi de prezentare vizuală a distribuţiilor de frecvenţe pentru date de interval sau de raport, asemănătoare diagramelor cu coloane. Întrucât într-o histogramă se folosesc limitele de clasă reale ale intervalelor considerate, coloanele apar în contact două câte două. Figura 2.5 prezintă o histogramă pentru datele din tabelul 2.7.

Figura 2.5. Histograma scorurilor obţinute la un test de cunoştinţe



În general, o histogramă se construieşte după cum urmează:

1. Intervalele de clasă sau scorurile se dispun pe axa orizontală (axa absciselor), utilizând limite de clasă reale.
2. Frecvenţele se dispun pe axa verticală (axa ordonatelor).
3. Se construieşte câte o coloană pentru fiecare interval, cu înălţimea corespunzătoare numărului de cazuri din interval şi cu lăţimea corespunzătoare limitelor reale ale intervalului.
4. Se etichetează axele.

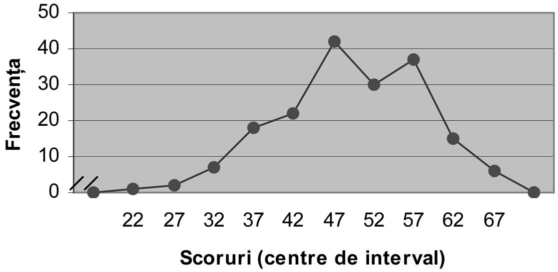
Altă modalitate obişnuită de prezentare vizuală a distribuţiilor de frecvenţe pentru variabile de interval sau de raport este **poligonul de frecvenţe**. Un poligon de frecvenţe utilizează centrele de interval şi se construieşte după cum urmează:

1. Se plasează câte un punct în dreptul fiecărui centru de interval, la înălțimea corespunzătoare frecvenței din intervalul respectiv.
2. Punctele astfel obținute se unesc prin linii drepte.
3. Se închide poligonul, considerându-se câte un interval suplimentar cu frecvența zero la fiecare capăt al distribuției şi unind prin linii drepte punctele extreme cu centrele de interval (aflate pe abscisă) ale intervalelor suplimentare.
4. Se etichetează axele.

Pentru simplificarea construcției, pe axa absciselor se pot marca direct centrele de interval, în locul limitelor de clasă. Deşi redă aceeaşi informație ca şi histogramele, poligoanele de frecvențe sunt utile pentru a da o imagine generală a unei distribuții de frecvențe.

Figura următoare prezintă un poligon de frecvențe care redă aceeaşi informație ca şi histograma din figura precedentă.

Figura 2.6. Poligonul de frecvențe al scorurilor obținute la un test de cunoştințe



Ogive

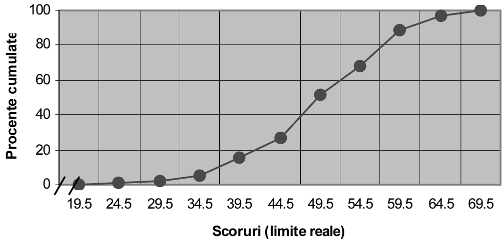
Ogivele, numite şi „curbe cumulative ale frecvențelor“ sau „poligoane de frecvențe cumulate“, prezintă vizual frecvențele cumulate sau procentele cumulate ale unei distribuții. O ogivă utilizează limitele de clasă reale superioare ale intervalelor (LCRS) şi se construieşte după cum urmează:

1. LCRS se dispun pe axa absciselor.

2. Frecvențele cumulate sau procentele cumulate se dispun pe axa ordonatelor.
3. Se plasează câte un punct în dreptul fiecărei LCRS, la înălțimea corespunzătoare frecvenței cumulate sau procentului cumulat în intervalul corespunzător acelei LCRS.
4. Punctele astfel obținute se unesc prin linii drepte.
5. Ogiva se închide la stânga, extinzând o linie dreaptă către limita de clasă reală inferioară a primului interval.
6. Se etichetează axele.

Figura 2.7 prezintă o ogivă pentru datele din tabelul 2.6.

Figura 2.7. Ogivă pentru scorurile obținute la un test de cunoştințe



După cum vom vedea în capitolul 3, o ogivă poate fi utilizată pentru a afla diferite puncte de interes într-o distribuție de frecvențe.

În capitolul 11 vom folosi **diagrame de împrăştiere**, numite şi „diagrame ale norilor de puncte“ sau „scatergrame“[7], care sunt modalități de prezentare vizuală a corelației dintre două variabile măsurate la nivel de interval sau de raport.

[7] De la substantivul din limba engleză „scatter“, care înseamnă *împrăştiere*.

GLOSAR

Centre de interval: puncte situate exact la mijlocul unui interval de clasă.

Diagramă circulară: cerc împărțit într-un număr de sectoare egal cu numărul de categorii ale variabilei de interes, mărimea fiecărui sector fiind proporțională cu procentul de cazuri din categoria respectivă..

Diagramă cu coloane: modalitate de prezentare vizuală a distribuției unei variabile, în care categoriile sunt reprezentate prin coloane cu baza egală, înălțimea fiecărei coloane fiind proporțională cu procentul de cazuri din categoria respectivă.

Distribuție de frecvențe: dispunere a valorilor unei variabile, care arată câte cazuri sunt conținute în fiecare categorie a variabilei respective.

Frecvență cumulată: numărul de cazuri dintr-un interval de clasă şi din toate intervalele precedente.

Histogramă: modalitate de prezentare vizuală a distribuțiilor de frecvențe pentru variabile de interval sau de raport, în care categoriile sunt reprezentate prin coloane continue cu baza egală cu limitele reale ale intervalelor de clasă respective, înălțimea fiecărei coloane fiind proporțională cu procentul de cazuri din interval.

Intervale de clasă: categorii utilizate în cazul distribuțiilor de frecvențe pentru variabile de interval sau de raport.

Limite de clasă reale: limitele superioară şi inferioară ale intervalelor de clasă, folosite atunci când distribuția de frecvențe respectivă este considerată ca fiint continuă.

Limite stabilite: limitele superioară şi inferioară ale intervalelor de clasă, aşa cum apar acestea în distribuția de frecvențe inițială.

Ogivă: modalitate de prezentare vizuală a frecvențelor cumulate sau a procentelor cumulate ale unei distribuții de frecvențe pentru variabile de interval sau de raport.

Procent: numărul de cazuri dintr-o categorie a unei variabile împărțit la numărul de cazuri din toate categoriile variabilei respective, rezultatul fiind înmulțit cu 100.

Procent cumulat: procentul de cazuri dintr-un interval de clasă şi din toate intervalele precedente.

Proporție: numărul de cazuri dintr-o categorie a unei variabile împărțit la numărul de cazuri din toate categoriile variabilei respective.

Raport: numărul de cazuri dintr-o categorie a unei variabile împărțit la numărul de cazuri din altă categorie a variabilei respective.

Rată: numărul de cazuri reale (efective) împărțit la numărul de cazuri posibile pentru variabila de interes pe o anumită unitate de timp.

3

MĂRIMILE TENDINȚEI CENTRALE ŞI ALE DISPERSIEI

Utilizarea distribuțiilor de frecvențe şi a tehnicilor grafice de prezentare a acestora permite relevarea formelor globale ale distribuțiilor unor scoruri. Pentru descrierea mai detaliată a unei distribuții de scoruri, statisticienii folosesc două tipuri de mărimi numerice descriptive. Este vorba despre ideea de caz tipic sau central într-o distribuție, redată prin **mărimile tendinței centrale**, şi despre ideea de varietate sau eterogenitate a unei distribuții, redată prin **mărimile dispersiei**. Determinarea acestor mărimi furnizează valori precise care pot fi uşor interpretate şi comparate între ele.

3.1. MĂRIMILE TENDINȚEI CENTRALE

Mărimile folosite în mod obişnuit pentru măsurarea tendinței centrale sunt media aritmetică, mediana şi modul. Fiecare dintre aceste mărimi rezumă o întreagă distribuție de scoruri, descriind cea mai tipică sau centrală valoare a distribuției respective sub forma unui singur număr sau a unei singure categorii.

3.1.1. MEDIA ARITMETICĂ

Media aritmetică se calculează doar pentru variabile măsurate la nivel de interval sau de raport şi se defineşte ca rezultat al împărțirii su-

mei tuturor scorurilor dintr-o mulțime de scoruri la numărul total de scoruri din acea mulțime. Simbolul folosit pentru media aritmetică a unui eşantion este $\overline{X}$, iar pentru media aritmetică a unei populații se foloseşte litera grecească μ (*miu*). Întrucât deocamdată va fi vorba numai despre eşantioane, vom folosi simbolul $\overline{X}$. Formula matematică a mediei aritmetice este următoarea:

Formula 3.1 $$\overline{X} = \frac{\sum X_i}{n}$$

în care $\sum X_i$ = suma scorurilor

n = numărul total de scoruri.

Să presupunem, de pildă, că am înregistrat vârstele pentru un eşantion de 11 persoane şi că am obținut următoarea distribuție de frecvențe:

Tabelul 3.1. Vârstele pentru un eşantion de 11 persoane

Vârsta	f
16	1
17	4
18	1
19	2
23	3
TOTAL	11

Să remarcăm că avem 11 scoruri, câte unul pentru fiecare persoană din eşantion. Pentru a afla media aritmetică a vârstelor persoanelor din eşantion sau, pe scurt, vârsta medie, trebuie să însumăm *toate* cele 11 scoruri şi să împărțim rezultatul obținut la 11. Pentru a scurta procedura, înmulțim fiecare scor cu frecvența cu care apare, adunăm rezultatele înmulțirilor şi împărțim suma astfel obținută la 11:

$$\overline{X} = \frac{\sum X_i}{n} = \frac{(1 \cdot 16) + (4 \cdot 17) + (1 \cdot 18) + (2 \cdot 19) + (3 \cdot 23)}{11} = \frac{209}{11} = 19$$

Astfel, media aritmetică a vârstelor persoanelor din eşantionul considerat este 19.

Media aritmetică este mărimea statistică folosită cel mai des în aprecierea tendinţei centrale a unei mulţimi de scoruri de interval sau de raport deoarece este uşor de calculat şi în plus are următoarele proprietăţi importante, pe care le vom folosi în unele aplicaţii ulterioare.

1. Pentru orice distribuţie de scoruri, suma abaterilor scorurilor de la media lor aritmetică este egală cu zero. **Abaterea** unui scor X_i faţă de media aritmetică $\overline{X}$ este diferenţa $X_i - \overline{X}$, astfel că această proprietate se exprimă simbolic după cum urmează:

$$\sum (X_i - \overline{X}) = 0$$

În cuvinte, suma diferenţelor dintre scoruri şi media lor aritmetică este egală cu 0. Această proprietate, care este folosită în obţinerea unor formule statistice mai complicate, poate fi exprimată şi spunând că, pentru orice distribuţie de scoruri, media aritmetică este punctul în jurul căruia toate scorurile se anulează, ceea ce face din media aritmetică o mărime descriptivă adecvată în măsurarea centralităţii scorurilor.

2. Pentru orice distribuţie de scoruri, suma pătratelor abaterilor scorurilor faţă de media lor aritmetică este mai mică decât suma pătratelor abaterilor scorurilor faţă de oricare alt scor din distribuţie, în simboluri:

$$\sum (X_i - \overline{X})^2 < \sum (X_i - X_j)^2$$

În cuvinte, suma pătratelor diferenţelor dintre scoruri şi media lor aritmetică este mai mică decât suma pătratelor diferenţelor dintre scoruri şi oricare alt scor din distribuţie. Această proprietate, care este folosită pentru a defini unele mărimi ale dispersiei şi pentru a calcula unele mărimi ale corelaţiei[8], poate fi exprimată şi spunând că media aritmetică este punctul în jurul căruia suma abaterilor pătratice ale scorurilor este minimă.

Tabelul 3.2 ilustrează cele două proprietăţi ale mediei aritmetice pentru distribuţia de scoruri din tabelul 3.1, în care $\overline{X}$ = 19.

---

[8] Vezi capitolul 11.

Tabelul 3.2. Proprietăți ale mediei aritmetice pentru datele din tabelul 3.1.

X_i	$X_i - \overline{X}$	$(X_i - \overline{X})^2$	$(X_i - 17)$	$(X_i - 17)^2$
16	–3	9	–1	1
17	–2	4	0	0
17	–2	4	0	0
17	–2	4	0	0
17	–2	4	0	0
18	–1	1	1	1
19	0	0	2	4
19	0	0	2	4
23	4	16	6	36
23	4	16	6	36
23	4	16	6	36
Σ	0	74		118

Se poate constata că suma abaterilor pătratice ale scorurilor față de media aritmetică (74) este mai mică decât suma abaterilor pătratice ale scorurilor față de scorul 17 (118). Această relație are loc pentru oricare alt scor din distribuție.

Este important de reținut că în cazul în care o distribuție are foarte puține scoruri extreme (foarte mari sau foarte mici), media aritmetică poate deveni o mărime înşelătoare în aprecierea centralității. De pildă, mulțimea de scoruri 15, 20, 25, 30, 35 are media aritmetică 25, în timp ce media aritmetică a mulțimii 15, 20, 25, 30, 3 500 este 718, iar media aritmetică a mulțimii 1, 15, 20, 25, 30, este 18,2. Se poate constata că media aritmetică este afectată disproporționat de prezența scorurilor 3 500 şi, respectiv, 1. Media aritmetică este „trasă“ întotdeauna în direcția scorurilor extreme, mai ales în direcția celor relativ mari[9]. Acesta este un motiv pentru care se recurge uneori la o altă mărime a tendinței centrale: mediana.

[9] Aceasta este sursa glumei numite „paradoxul statisticii“: dacă X are 10 paltoane şi Y nu are nici un palton, atunci X şi Y au în medie câte 5 paltoane.

3.1.2. MEDIANA

Mediana poate fi determinată atât pentru variabile măsurate la nivel de interval sau de raport, cât şi pentru variabile măsurate la nivel ordinal. Ca şi în cazul mediei aritmetice, şi în cazul medianei vom folosi două simboluri: $\widetilde{X}$ pentru mediana unui eşantion şi $\widetilde{\mu}$ pentru mediana unei populaţii. De asemenea, întrucât deocamdată va fi vorba numai despre eşantioane, vom folosi simbolul $\widetilde{X}$.

Mediana $\widetilde{X}$ a unei mulţimi de scoruri este „punctul de mijloc“ al acelei mulţimi, în sensul că numărul de cazuri cu scoruri mai mici sau egale cu $\widetilde{X}$ este egal cu numărul de cazuri cu scoruri mai mari sau egale cu $\widetilde{X}$. Pentru a afla mediana unei mulţimi de *n* scoruri, scorurile respective se aranjează mai întâi în ordine crescătoare sau descrescătoare. Dacă *n* este impar, atunci mediana este, evident, scorul cazului de mijloc. Dacă *n* este par, atunci vor fi două cazuri de mijloc şi orice valoare cuprinsă între cele două scoruri ale cazurilor de mijloc satisface definiţia medianei. Într-o astfel de situaţie, dacă scorurile sunt de interval sau de raport, prin convenţie, se ia drept mediană media aritmetică a celor două scoruri ale cazurilor de mijloc.

În exemplu din tabelul 3.1 avem de-a face cu 11 cazuri. Vârsta mediană este 18, deoarece avem în eşantion cinci persoane cu vârste mai mici de 18 ani şi cinci persoane cu vârste mai mari de 18 ani. Să presupunem acum că am înregistrat vârstele pentru un eşantion de 7 persoane şi că am obţinut următoarea distribuţie de frecvenţe:

Tabelul 3.3. Vârstele pentru un eşantion de 7 persoane

Vârsta	*f*
26	2
28	1
29	1
30	1
32	1
60	1
TOTAL	7

Pentru datele din acest tabel, $\widetilde{X} = 29$: trei persoane au vârste mai mici de 29 de ani şi alte trei persoane au vârste mai mari de 29 de ani. De remarcat că vârsta tipică a persoanelor din acest eşantion este mai bine reprezentată de vârsta mediană decât de media aritmetică a vârstelor, 33, care este „trasă“ în sus de scorul 60. Acum, dacă adăugăm la acest eşantion o persoană de 31 de ani, avem 8 cazuri cu scorurile 26, 26, 28, 29, 30, 31, 32 şi 60. Astfel, apar două cazuri de mijloc, unul cu scorul 29 şi celălalt cu scorul 30, şi orice număr cuprins între aceste două scoruri satisface definiţia medianei. Ca atare, mediana este media aritmetică a scorurilor celor două cazuri de mijloc: 29, 5.

Următoarele două exemple arată de ce este inclusă expresia „sau egale“ în definiţia medianei. Să presupunem că am înregistrat numărul de copii pentru un eşantion de 16 familii, rezultatele obţinute fiind următoarele:

Tabelul 3.4. Numărul de copii pentru un eşantion de 16 familii

Număr de copii	f
0	3
1	4
2	7
3	2
TOTAL	16

În eşantionul considerat în tabelul 3.4, 8 familii au 0, 1 sau 2 copii, iar celelalte 8 familii au câte 2 sau 3 copii, astfel că cea de-a 8-a şi cea de-a 9-a familie (cele două cazuri de mijloc) au acelaşi număr de copii: 2. Ca atare, mediana aceste mulţimi de scoruri este 2: 8 familii au fiecare un număr de copii mai mic sau egal cu 2, iar celelalte 8 familii au fiecare un număr de copii mai mare sau egal cu 2. Tot aşa, în mulţimea impară de scoruri

1, 2, 3, 5, 5, 5, 7, 10, 12

scorul median este 5, căci avem patru scoruri mai mici sau egale cu 5 (1, 2, 3, 5) şi patru scoruri mai mari sau egale cu 5 (5, 7, 10, 12).

Următorul exemplu ilustrează determinarea medianei pentru variabile de nivel ordinal. Să presupunem că într-o cercetare privind modul de petrecere a timpului liber, 11 subiecţi au fost solicitaţi să răspundă la întrebarea „Cât de des aţi fost la cinematograf în ultimele şase luni?" Răspunsurile la această întrebare au fost înregistrate pe o scală ordinală cu următoarele categorii: 1. *Deloc*, 2. *Foarte rar*, 3. *Rar*, 4. *Des*, 5. *Foarte des*. Aranjând scorurile în ordine descrescătoare, datele sunt următoarele:

Tabelul 3.5. „Cât de des mergeţi la cinematograf?"

Subiectul	Răspunsul
A	*Foarte des*
B	*Foarte des*
C	*Foarte des*
D	*Foarte des*
E	*Foarte des*
F	*Des*
G	*Foarte rar*
H	*Foarte rar*
I	*Foarte rar*
J	*Foarte rar*
K	*Deloc*

Având un total de 11 cazuri, cazul de mijloc este al 6-lea, *F*, aşa încât răspunsul median este scorul celui de-al şaselea caz: *Des*. Dacă adăugăm un subiect care dă răspunsul *Deloc*, avem două cazuri de mijloc: cel de-al 6-lea, *F*, şi cel de-al 7-lea, *G*. În această situaţie, teoretic vorbind, orice răspuns între *Des* şi *Foarte rar* satisface definiţia medianei. Practic, pe scala menţionată, între *Des* şi *Foarte rar* avem răspunsul *Rar*, pe care îl vom considera drept răspuns median: 6 subiecţi merg la cinematograf foarte des sau des, iar ceilalţi şase subiecţi merg la cinematograf foarte rar sau deloc.

Dacă numărul de cazuri din eşantion este relativ mic, identificarea cazului sau cazurilor de mijloc este neproblematică. Pentru eşantioane mari, identificarea menționată poate fi înlesnită prin folosirea unor calcule simple. Astfel, după ordonarea scorurilor, dacă *n* este impar, cazul de mijloc este dat de formula $(n+1)/2$; dacă *n* este par, primul caz de mijloc este dat de formula $n/2$, iar cel de-al doilea caz de mijloc de formula $(n/2)+1$. Ca exercițiu, determinați mediana scorurilor din tabelul 2.4 din capitolul anterior. (Puteți folosi tabelul 2.5? Dacă da, cum?)

De notat că mediana nu este „trasă" în direcția valorilor extreme, deoarece această mărime ia în considerare doar ordinea scorurilor, nu şi magnitudinea efectivă a acestora[10]. Reluând un exemplu dat mai sus, mulțimea de scoruri 15, 20, 25, 30, 35 are aceeaşi mediană ca şi mulțimea 15, 20, 25, 30, 3 500: scorul 25. Să mai remarcăm că mediana şi media aritmetică ale unei mulțimi de scoruri pot să coincidă, acesta fiind, de pildă, cazul mulțimii 15, 20, 25, 30, 35.

Mediana nu poate fi determinată pentru variabile de nivel nominal, deoarece aceste variabile nu au scoruri care să poată fi ordonate. Mărimea tendinței centrale care poate fi folosită la nivel nominal, ca şi la toate celelalte niveluri de măsură, este modul.

3.1.3. MODUL

Modul unei mulțimi de scoruri (*Mo*) este scorul care apare cel mai frecvent în acea mulțime. De pildă, modul datelor din tabelul 3.4 este 2, deoarece este scorul care apare de cele mai multe ori în eşantionul considerat, iar modul datelor din tabelul 3.5 sau, altfel spus, răspunsul modal, este *Foarte des*, deoarece este răspunsul care apare de cele mai multe ori în raport cu celelalte răspunsuri.

Modul este singura mărime care poate fi folosită în măsurarea tendinței centrale pentru variabile de nivel nominal. Modul unei astfel de variabile este cea mai mare categorie a sa sau, altfel spus, categoria cu cele mai multe cazuri. De pildă, modul variabilei *status marital* pentru distribuția din tabelul 2.10 din capitolul anterior este categoria *Căsătorit*.

---

[10] Acesta este şi motivul pentru care mediana se foloseşte cu precădere pentru date ordinale.

Exemplele date până acum ilustrează cazul mulțimilor *unimodale* de scoruri, adică a mulțimilor în care există un singur scor care apare mai frecvent decât celelalte. Dacă într-o mulțime de scoruri există două astfel de scoruri, ca în exemplul

3, 3, 3, 5, 5, 5, 7, 10, 12,

atunci se spune că mulțimea respectivă este *bimodală*. Desigur, este posibil ca o mulțime de scoruri să aibă trei sau mai multe moduri, după cum este posibil ca o mulțime de scoruri să nu aibă mod, fiecare scor din mulțimea respectivă apărând de un număr egal de ori. Pe de altă parte, este posibil ca o mulțime unimodală să nu aibă modul localizat „la mijloc“. Fie, de pildă, următoarea mulțime de scoruri:

44, 44, 46, 46, 46, 48, 50, 50, 50, 50, 50.

Modul acestei mulțimi este 50, în timp ce mediana este 48, iar media aritmetică este aproximativ 47,6. Pretenția că modul este o mărime a tendinței centrale trebuie să fie înțeleasă în sensul că această mărime indică localizarea celei mai mari grupări sau concentrări de scoruri dintr-o mulțime unimodală, ceea ce se poate dovedi important în special pentru date de nivel nominal. Să presupunem că ultima mulțime de scoruri de mai sus reprezintă o înregistrare a măsurilor sacourilor vândute într-un magazin timp de o săptămână. Astfel, modul măsurilor de sacouri vândute sau, altfel spus, măsura modală a acestora este de mai mare interes pentru directorul magazinului decât mediana măsurilor de sacouri vândute. Pe de altă parte, să observăm că în acest caz, media aritmetică a scorurilor nu este în nici un fel semnificativă: numerele care indică măsuri de sacouri sunt convenționale, astfel că ele puteau fi înlocuite, de pildă, cu litere.

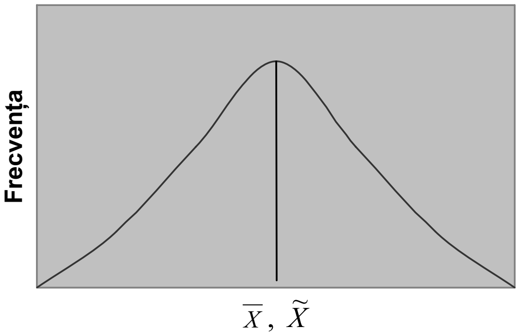
3.1.4. DISTRIBUȚII SIMETRICE ŞI DISTRIBUȚII ASIMETRICE

După cum am arătat, dacă lucrăm cu date nominale, singura mărime a tendinței centrale pe care o putem folosi este modul; dacă datele sunt ordinale, putem folosi atât modul, cât şi mediana, iar dacă datele sunt de interval sau de raport, putem folosi toate cele trei mărimi ale tendinței centrale.

După cum vom vedea în capitolele dedicate statisticii inferențiale, la nivel de interval sau de raport media aritmetică este cu deosebire utilă

pentru a trage concluzii despre caracteristicile unei populaţii pe baza caracteristicilor corespunzătoare ale unui eşantion din acea populaţie. Pentru scopuri descriptive însă, dacă lucrăm cu date de interval sau de raport, este recomandabil să folosim toate mărimile tendinţei centrale, deoarece, pe de o parte, ele pot furniza informaţii relativ diferite şi, pe de altă parte, compararea valorilor mediei aritmetice şi medianei furnizează informaţie despre forma unei distribuţii. Astfel, media aritmetică şi mediana au aceeaşi valoare numai atunci când distribuţia este **simetrică**. Într-un astfel de caz, dacă distribuţia este unimodală, atunci şi modul are aceeaşi valoare cu celelalte două mărimi. Să considerăm următorul poligon de frecvenţe „rotunjit“, care prezintă o distribuţie de frecvenţe simetrică:

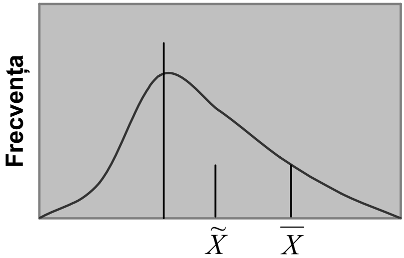
Figura 3.1. O distribuţie simetrică ($\overline{X} = \widetilde{X}$)



În această distribuţie, media aritmetică, mediana şi modul apar împreună în cel mai înalt punct al curbei. Acest punct este *modul*, deoarece este punctul în care sunt înregistrate cele mai multe cazuri, este *mediana*, deoarece numărul de cazuri înregistrate la stânga acestui punct este egal cu numărul de cazuri înregistrate la dreapta sa şi este *media aritmetică*, deoarece scorurile aflate în partea dreaptă întrec scorul median în aceeaşi măsură în care scorurile aflate în partea stângă sunt mai mici decât scorul median.

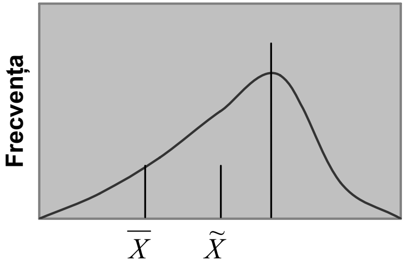
Atunci când o distribuție are doar câteva scoruri foarte mari sau, altfel spus, scorurile relativ mici sunt predominante, media aritmetică este mai mare decât mediana. Într-un astfel de caz, se spune că distribuția respectivă prezintă o **asimetrie pozitivă**. Figura 3.2 ilustrează cazul unei distribuții cu asimetrie pozitivă.

Figura 3.2. O distribuție cu asimetrie pozitivă ($\overline{X} > \widetilde{X}$)



Atunci când o distribuție are doar câteva scoruri foarte mici sau, altfel spus, scorurile relativ mari sunt predominante, media aritmetică este mai mică decât mediana. Într-un astfel de caz, se spune că distribuția respectivă prezintă o **asimetrie negativă**. Figura 3.3 ilustrează cazul unei distribuții cu asimetrie negativă.

Figura 3.3. O distribuție cu asimetrie negativă ($\overline{X} < \widetilde{X}$)



După cum se poate constata, compararea mediei aritmetice cu mediana ne indică imediat dacă distribuţia respectivă este sau nu simetrică şi dacă nu, ne indică sensul asimetriei.

3.1.5. MEDIA ARITMETICĂ PONDERATĂ

Să presupunem că într-o serie de 140 de studenţi sunt 86 de băieţi şi 54 de fete. Ştim că la examenul de statistică, media aritmetică a notelor obţinute de fete este 8,45 şi media aritmetică a notelor obţinute de băieţi este 7,33. Ne interesează media aritmetică a celor două grupuri combinate. Dacă am calcula pur şi simplu media aritmetică a celor două medii, am greşi, deoarece grupurile diferă în privinţa numărului de studenţi şi deci de scoruri. Pentru a afla media aritmetică a celor două grupuri combinate, vom calcula **media aritmetică ponderată**. Pentru aceasta, înmulţim numărul de scoruri din fiecare grup cu media aritmetică a grupului respectiv, adunăm produsele astfel obţinute, iar rezultatul îl împărţim la numărul total de scoruri. În simboluri:

Formula 3.2.
$$\overline{X} = \frac{\sum n_i \overline{X}_i}{N}$$

în care n_i = numărul de scoruri din fiecare grup;

$\overline{X}_i$ = media aritmetică a fiecărui grup;

N = numărul total de scoruri.

În exemplul nostru avem:

$$\overline{X} = \frac{\sum n_i \overline{X}_i}{N} = \frac{(86 \cdot 7{,}33) + (54 \cdot 8{,}45)}{140} = \frac{1086{,}68}{140} = 7{,}76$$

Dacă am fi făcut media aritmetică a valorilor 7,33 şi 8,45 am fi obţinut 7,89, ceea ce ar fi fost incorect, căci grupurile diferă în privinţa numărului de scoruri. Evident, media aritmetică ponderată poate fi calculată şi pentru mai mult de două grupuri.

Este important de remarcat că, aplicate la aceeaşi mulţime de scoruri, formulele 3.1 şi 3.2 produc acelaşi rezultat. Pentru ilustrare, fie următoa-

rea mulțime de 10 scoruri, împărțită în două grupuri: n_1 = {5, 5, 5, 6, 7, 7}, n_2 = {7, 8, 9, 10}. Media aritmetică pentru întreaga mulțime este

$$\overline{X} = \frac{\sum X_i}{n} = \frac{(5 \cdot 3) + 6 + (7 \cdot 3) + 8 + 9 + 10}{10} = \frac{69}{10} = 6{,}90$$

Acum, mediile aritmetice ale celor două grupuri sunt, respectiv, $\overline{X}_1 = 5{,}83$ şi $\overline{X}_2 = 8{,}50$, astfel că media aritmetică ponderată a celor două grupuri este

$$\overline{X} = \frac{\sum n_i \overline{X}_i}{N} = \frac{(6 \cdot 5{,}83) + (4 \cdot 8{,}50)}{10} = \frac{35 + 34}{10} = \frac{69}{10} = 6{,}90$$

Încă o dată, calculul mediei aritmetice a celor două medii conduce la un rezultat greşit: 7,16.

3.1.6. MĂRIMILE TENDINȚEI CENTRALE PENTRU DATE GRUPATE

În cele ce urmează sunt expuse tehnicile statistice de aflare a mărimilor tendinței centrale pentru date de interval sau de raport grupate în distribuții de frecvențe. Aceste tehnici îşi dovedesc utilitatea în două situații. O primă situație apare atunci când trebuie să lucrăm cu o mulțime mare de scoruri brute şi nu dispunem de un calculator sau de un computer sau decidem că valorile aproximative ale acestor mărimi sunt suficiente pentru scopurile noastre. O a doua situație apare atunci când avem de-a face cu date din surse secundare, deja organizate în distribuții de frecvențe cu intervale de clasă, fără să avem acces la scorurile brute inițiale. Într-o astfel de situație, întrucât nu cunoaştem modul în care scorurile sunt realmente distribuite, nu putem decât să aproximăm mărimile tendinței centrale ale distribuțiilor respective.

Pentru ilustrare, să considerăm exemplul privind scorurile obținute de 180 de subiecți la un test de cunoştințe, pe care am lucrat în capitolul anterior. Înainte de a trece mai departe, prezentăm valorile calculate pentru scorurile brute, pentru a le putea compara cu cele calculate pentru datele grupate. Astfel, în exemplul nostru avem:

$$\overline{X} = 49{,}22 \quad \widetilde{X} = 49 \quad Mo = 56$$

Să considerăm acum distribuția de frecvențe a scorurilor obținute de 180 de subiecți la un teste de cunoştințe:

Tabelul 3.6. Distribuția de frecvențe a scorurilor obținute la un test de cunoştințe

Intervale de clasă	f
20–24	1
25–29	2
30–34	7
35–39	18
40–44	22
45–49	42
50–54	30
55–59	37
60–64	15
65–69	6
TOTAL	180

Media aritmetică pentru date grupate

Pentru a calcula media aritmetică a unei mulțimi de scoruri trebuie să cunoaştem două valori: suma tuturor scorurilor, ΣX_i, şi numărul de scoruri, n. În cazul distribuției din tabelul 3.6, nu ştim decât că $n = 180$. Deoarece datele au fost grupate, nu cunoaştem distribuția exactă a scorurilor individuale şi deci nu putem determina exact ΣX_i.

Să considerăm primul interval (20–24). În acest interval se află un singur caz, dar nu ştim care este scorul acestuia. Pentru a depăşi această lacună, vom presupune că scorul acestui caz este situat în centrul intervalului. Această presupunere revine la a spune că scorul cazului din acest interval este 22, acest număr aproximând scorul său efectiv. În cel de-al doilea interval (25–29) se află două cazuri. Şi aici vom presupune că scorurile celor două cazuri sunt situate în centrul intervalului, presupunere care revine la a spune că fiecare dintre cele două cazuri are scorul 27. Sub

această presupunere, suma scorurilor individuale din cel de-al doilea interval este 54 (27×2), acest număr aproximând suma reală a scorurilor individuale din interval. Procedând la fel pentru celelalte intervale şi adunând apoi rezultatele, vom obţine un număr care aproximează suma reală a tuturor scorurilor individuale. În fine, împărţind valoarea astfel obţinută la numărul de scoruri (180), vom obţine media aritmetică aproximativă a scorurilor.

În general, supoziţia calculului mediei aritmetice pentru date grupate este că în fiecare interval de clasă toate scorurile sunt situate în centrul intervalului respectiv. Sub această supoziţie, procedura de calcul este următoarea:

1. Pentru fiecare interval i, se calculează centrul m_i.
2. Numărul de cazuri din fiecare interval, f_i, se înmulţeşte cu centrul intervalului respectiv, m_i: $f_i m_i$.
3. Se calculează $\Sigma f_i m_i$, iar valoarea astfel obţinută se împarte la numărul de scoruri n.

Întrucât $\Sigma f_i m_i \cong \Sigma X_i$, vom avea:

Formula 3.3.

$$\overline{X} \cong \frac{\sum f_i m_i}{n}$$

Pentru a aplica această procedură la exemplul nostru, vom adăuga două coloane la distribuţia de frecvenţe din tabelul 3.6, una pentru centrele de interval şi una pentru produsele dintre centrele de interval şi frecvenţe:

Tabelul 3.7. Calculul mediei aritmetice pentru date grupate

Intervale de clasă	*f*	*m*	*fm*
20–24	1	22	22
25–29	2	27	54
30–34	7	32	224
35–39	18	37	666
40–44	22	42	924
45–49	42	47	1974
50–54	30	52	1560
55–59	37	57	2109
60–64	15	62	930
65–69	6	67	402
TOTAL	180		8865

Totalul ultimei coloane este valoarea pentru $\Sigma f_i m_i$. Împărțind această valoare la numărul total de cazuri obținem media aritmetică aproximativă a scorurilor:

$$\overline{X} \cong \frac{\sum f_i m_i}{n} = \frac{8865}{180} = 49{,}25$$

După cum se poate constata, valoarea obținută în acest fel reprezintă o deosebit de bună aproximare a valorii efective a mediei aritmetice.

Mediana pentru date grupate

Ştim că pentru a afla mediana unei distribuții ordonate de scoruri trebuie să identificăm mai întâi cazul sau cazurile de mijloc ale distribuției respective. Atunci când se lucrează cu date grupate, se introduce o simplificare: cazul de mijloc este identificat la $n/2$, indiferent dacă n este par sau impar. În exemplul nostru, având 180 de cazuri în eşantion, cazul de mijloc va fi identificat la 180/2, i.e. al 90-lea caz. Mai departe, problema este de a localiza acest caz şi apoi de a afla scorul asociat lui. Evident, atunci când datele sunt grupate, cazul de mijloc se află într-un interval de clasă. Supoziția calculului medianei pentru date grupate este că în fiecare

interval de clasă toate scorurile sunt distribuite uniform între limitele reale ale intervalului. Astfel, după ce identificăm intervalul care conține cazul de mijloc, vom afla scorul respectiv pe baza acestei supoziții. Pentru identificarea intervalului de clasă care conține cazul de mijloc, adăugăm o coloană de frecvențe cumulate la distribuția de frecvențe inițială:

Tabelul 3.8. Calculul medianei pentru date grupate

Intervale de clasă	*f*	*fc*
20-24	1	1
25-29	2	3
30-34	7	10
35-39	18	28
40-44	22	50
45-49	42	92
50-54	30	122
55-59	37	159
60-64	15	174
65-69	6	180
TOTAL	180	

Inspectând coloana de frecvențe cumulate, constatăm că 50 de cazuri s-au cumulat sub limita superioară a intervalului 40–44 şi că 92 de cazuri s-au cumulat sub limita superioară a intervalului 45–49. Ştim acum că mediana — scorul asociat celui de-al 90-lea caz — este o valoare cuprinsă între limita reală inferioară şi limita reală superioară ale intervalului 45–49, adică între 44,5 şi 49,5. Mai departe, presupunem că toate cele 42 de cazuri situate în acest interval sunt distribuite uniform între limitele reale ale intervalului, cazul 51 fiind situat la limita reală inferioară (44,5), iar cazul 92 la limita reală superioară (49,5). În intervalul care conține mediana sunt 42 de cazuri, cazul 92, cumulat în acest interval, fiind al 42-lea; prin urmare, cazul 90 este al 40-lea din cele 42 din interval[11]. Aceasta revine la a spune că, pentru a afla al câtelea caz este cazul 90, scădem din

[11] Cu alte cuvinte, cazul 51 este primul, 52 al doilea, …, 90 al 40-lea.

90 frecvența cumulată a cazurilor aflate sub intervalul în care se află mediana: 90 – 50 = 40. Dacă, așa cum am presupus, scorurile sunt distribuite uniform, atunci cazul 90 se află la 40/42 din distanța dintre 44,5 și 49,5. Acum, 40/42 din 5 (mărimea intervalului) este 4,76, astfel încât putem aproxima mediana la 44,5 + 4,76 sau 49,26.

În general, sub supoziția că în fiecare interval de clasă toate scorurile sunt distribuite uniform între limitele reale ale intervalului, procedura de calcul a medianei pentru date grupate este următoarea:

1. Se află cazul de mijloc, dat de $n/2$.
2. Se construiește o coloană de frecvențe cumulate și cu ajutorul acesteia se identifică intervalul care conține cazul de mijloc.
3. Se află al câtelea caz din interval este cazul de mijloc, scăzând din $n/2$ frecvența cumulată a cazurilor aflate sub intervalul identificat în pasul2.
4. Numărul obținut în pasul 3 se împarte la numărul de cazuri din interval.
5. Numărul obținut în pasul 4 se înmulțește cu mărimea intervalului.
6. Numărul obținut în pasul 5 se adună cu limita de clasă reală inferioară a intervalului care conține cazul de mijloc. Rezultatul reprezintă valoarea aproximativă a medianei.

Formula următoare rezumă acești pași:

Formula 3.4. $$\tilde{X} \cong LCRI_{\tilde{X}} + \left(\frac{n/2 - fc_i}{f_i} \right) i$$

în care $LCRI_{\tilde{X}}$ = limita de clasă reală inferioară a intervalului care conține al $n/2$-lea caz

n = numărul total de cazuri;

fc_i = frecvența cumulată sub intervalul care conține al $n/2$-lea caz;

f_i = numărul de cazuri din intervalul care conține al $n/2$-lea caz;

i = mărimea intervalului care conține al $n/2$-lea caz.

Aplicând această formulă la exemplul nostru, avem:

$$\tilde{X} \cong LCRI_{\tilde{X}} + \left(\frac{n/2 - fc_i}{f_i} \right) i = 44{,}5 + \left(\frac{(180/2) - 50}{42} \right) 5 = 44{,}5 + 4{,}76 = 49{,}26$$

Vom spune că aproximativ jumătate dintre subiecţii din eşantion au obţinut un scor mai mic de 49,26 şi jumătate mai mare de 49,26. Şi de data aceasta se poate constata că valoarea obţinută în acest fel reprezintă o foarte bună aproximare a valorii efective a medianei.

Intervalul modal

Atunci când datele sunt grupate, scorul modal efectiv al distribuţiei de frecvenţe respective nu poate fi determinat. Într-o astfel de situaţie se poate determina doar **intervalul modal** — intervalul care conţine cel mai mare număr de cazuri —, centrul acestui interval fiind considerat modul distribuţiei. Pentru o mai bună aproximare a modului unei distribuţii cu date grupate, în cazul în care distribuţia are două sau mai multe intervale neadiacente în care numărul de scoruri este mai mare decât în intervalele adiacente, atunci distribuţia respectivă este considerată *multimodală* (bimodală, trimodală etc.). În exemplul nostru, conform definiţiei stricte, intervalul modal este 45–49, astfel că centrul acestui interval, 47, apare ca mod al distribuţiei. Totuşi, întrucât aici apar două intervale neadiacente, 45–49 şi 55–59, în care numărul de scoruri este mai mare decât în intervalele adiacente, 42 şi respectiv 37, vom considera că distribuţia este bimodală, cele două moduri fiind centrele de interval respective: 47 şi 57. Se poate constata că intervalul 55–59 conţine modul efectiv al distribuţiei de frecvenţe, 56.

3.2. PERCENTILE

Mărimile tendinţei centrale furnizează informaţii despre mulţimi de scoruri. În anumite cazuri însă, cercetătorul poate fi interesat de descrierea poziţiei unui scor individual în raport cu celelalte scoruri dintr-o distribuţie. Dacă, de pildă, un subiect a obţinut scorul 47 la un test de cunoştinţe, semnificaţia acestui scor poate fi explicată inclusiv în termenii numărului de subiecţi din eşantionul considerat care au obţinut scoruri mai mici decât 47.

Poziția unui scor individual într-o distribuție poate fi determinată cu ajutorul percentilelor. Cea de-a *m*-a **percentilă** a unei mulțimi de scoruri, P_m, este valoarea față de care *cel mult m*% din scoruri sunt mai mici decât *m* şi *cel mult* (100 – *m*)% din scoruri sunt mai mari decât *m*. Întrucât mediana unei mulțimi de scoruri este valoarea față de care cel mult 50% din scoruri sunt mai mici şi cel mult 50% din scoruri sunt mai mari, mediana este cea de-a 50-a percentilă a acelei mulțimi. Tot aşa cum există un nume special pentru cea de-a 50-a percentilă a unei mulțimi de scoruri, există nume speciale pentru percentilele care împart o mulțime ordonată de scoruri în sferturi şi în zecimi: **cuartile**[12] şi, respectiv, **decile**. Lista următoare prezintă cele mai utilizate percentile, împreună cu simbolurile uzuale pentru cuartile şi decile (considerând că este vorba despre o mulțime de scoruri ordonată crescător):

D_1 = Prima decilă = P_{10}
Q_1 = Prima cuartilă = P_{25}
Q_2 = A doua cuartilă = P_{50} = $\widetilde{X}$
Q_3 = A treia cuartilă = P_{75}
D_9 = A noua decilă = P_{90}

Pentru ilustrare, fie următoarea mulțime ordonată de 15 scoruri:

2, 4, 4, 5, 7, 8, 10, 12, 17, 18, 18, 21, 27, 29, 30

5 ↓ Q_1 12 ↓ $\widetilde{X}$ 21 ↓ Q_3

Prima cuartilă este valoarea față de care cel mult 25% din scoruri, i.e. cel mult (15/100)25 = 3,75 scoruri sunt mai mici şi cel mult 75% din scoruri, i.e. cel mult (15/100)75 = 11,25 scoruri sunt mai mari. Singurul scor care satisface acest criteriu este 5, deci Q_1 = 5. Cea de-a doua cuartilă, mediana, este scorul central, i.e. 12. Cea de-a treia cuartilă este valoarea față de care cel mult 75% din scoruri, i.e. cel mult 11, 25 scoruri sunt mai mici şi cel mult 25% din scoruri, i.e. 3,75 scoruri, sunt mai mari. Singurul scor care satisface acest criteriu este 21, deci Q_3 = 21.

---

[12] Cuartilele sunt valori care împart o mulțime ordonată de scoruri în patru părți egale. În practică, termenul *cuartilă* se foloseşte adesea pentru referire la unul dintre aceste sferturi.

De notat că $(n/100)25 = n(0,25)$, iar $(n/100)75 = n(0,75)$. Ca atare, pentru Q_1 putem folosi formula $n(0,25)$, iar pentru Q_3 formula $n(0,75)$ sau, echivalent, $n - n(0,25)$. În exemplul nostru, $n(0,25) = 3,75$ şi $n(0,75) = n - n(0,25) = 11,25$.

Uneori, percentila căutată „cade“ între două scoruri din mulţimea respectivă. Într-un astfel de caz, prin convenţie, se alege media aritmetică a celor două scoruri pentru a aproxima percentila căutată. Să presupunem că ne interesează ce-a de-a 20-a percentilă din mulţimea de mai sus. Aceasta ar fi valoarea faţă de care cel mult 3 scoruri sunt mai mici şi cel mult 12 scoruri sunt mai mari. Întrucât orice număr cuprins între 4 şi 5 (inclusiv) satisface acest criteriu, vom alege 4,50 drept ce-a de-a 20-a percentilă.

Procedura de calcul a percentilelor pentru date grupate este asemănătoare procedurii de calcul a medianei pentru date grupate. Să considerăm din nou distribuţia de frecvenţe a scorurilor obţinute la un test de cunoştinţe de 180 de subiecţi şi să presupunem că ne interesează cea de-a 75-a percentilă. Pentru a o afla, vom folosi tabelul 3.8, care include o coloană de frecvenţe cumulate.

Mai întâi, identificăm intervalul de clasă care conţine percentila căutată. Având 180 de scoruri individuale în eşantion, P_{75} este valoarea faţă de care cel mult 135 (180 × 0,75) de scoruri sunt mai mici şi cel mult 45 (180 – 135) de scoruri sunt mai mari. Ca atare, intervalul de clasă care conţine percentila căutată este cel care conţine valoarea faţă de care cel mult 135 (180 × 0,75) de scoruri sunt mai mici. Inspectând coloana de frecvenţe cumulate din tabelul 3.8, constatăm că 122 de cazuri sau scoruri s-au cumulat sub limita superioară a intervalului 50–54 şi că 159 de cazuri sau scoruri s-au cumulat sub limita superioară a intervalului 55–59. Ştim acum că P_{75} este o valoare cuprinsă între limita reală inferioară şi limita reală superioară ale intervalului 55–59, adică între 54,5 şi 59,5. Mai departe, presupunem că toate cele 37 de cazuri situate în acest interval sunt distribuite uniform între limitele reale ale intervalului, cazul 123 fiind situat la limita reală inferioară (54,5), iar cazul 159 la limita reală superioară (59,5). În intervalul care conţine P_{75} sunt 37 de cazuri, cazul 135 fiind al 13-lea: cazul 123 este primul, 124 al doilea, …, 135 al 13-lea. Aceasta revine la a spune că, pentru a afla al câtelea caz este cazul

135, scădem din 135 frecvența cumulată a cazurilor aflate sub intervalul în care se află cazul 135: 135 – 122 = 13. Dacă, aşa cum am presupus, scorurile sunt distribuite uniform, atunci cazul 135 se află la 13/37 din distanța dintre 54,5 şi 59,5. Acum, 13/37 din 5 (mărimea intervalului) este 1,75, aşa încât putem aproxima P_{75} la 54,5 + 1,75 sau 56,25.

Formula următoare rezumă paşii de calcul al percentilelor pentru date grupate:

Formula 3.5. $$P_{\mathrm{m}} \cong LCRI_{\mathrm{m}} + \left(\frac{np - fc_i}{f_i} \right) i$$

în care $LCRI_{\mathrm{m}}$ = limita de clasă reală inferioară a intervalului care conține P_{m};

n = numărul total de scoruri;
p = proporția corespunzătoare percentilei căutate P_{m};
fc_i = frecvența cumulată sub intervalul care conține P_{m};
f_i = numărul de cazuri din intervalul care conține P_{m};
i = mărimea intervalului.

Aplicând formula 3.5 la exemplul nostru, avem:

$$P_{75} \cong 54{,}5 + \left(\frac{(180 \times 0{,}75) - 122}{37} \right) 5 = 54{,}5 + 1{,}75 = 56{,}25$$

Să presupunem acum că ne interesează procentul de subiecți care au obținut un scor mai mic sau egal cu 47 şi că nu dispunem decât de datele grupate din tabelul 3.8. Procentul de cazuri care au un scor mai mic sau egal cu un scor dat se numeşte **rangul percentilei** scorului respectiv.

Pentru a afla rangul percentilei pentru scorul 47, notat RP_{47}, observăm mai întâi că acest scor este cuprins în intervalul 45–49 şi că 50 de cazuri s-au cumulat sub limita reală inferioară a acestui interval, 44,5. Ca şi până acum, vom presupune că toate cele 42 de cazuri situate în acest interval sunt distribuite uniform între limitele reale ale intervalului. Sub această presupunere, proporția de cazuri din interval care au scoruri mai mici sau egale cu 47 este (47,0 – 44,5)/5 = 2,5/5 = 0,5. Ca atare, în acest interval sunt 42 × 0,5 = 21 de scoruri mai mici sau egale cu 47. Prin urmare, nu-

mărul total de scoruri mai mici sau egale cu 47 este 50 + 21 = 71, iar rangul percentilei scorului 47 poate fi aproximat la $(71/180) \times 100 = 39{,}4$. Aceasta înseamnă că 39,4% din cazuri au un scor mai mic sau egal cu scorul 47.

Următoarea formulă rezumă paşii de calcul al rangului percentilelor pentru date grupate:

Formula 3.6.
$$RP_X \cong \frac{fc_i + \left(\dfrac{X - LCRI_X}{i} \times f_i\right)}{n} \times 100$$

în care fc_i = frecvența cumulată sub intervalul care conține scorul X;

X = scorul pentru care se determină RP_X;

$LCRI_X$ = limita de clasă reală inferioară a intervalului care conține scorul X;

i = mărimea intervalului;

f_i = numărul de cazuri din intervalul care conține scorul X;

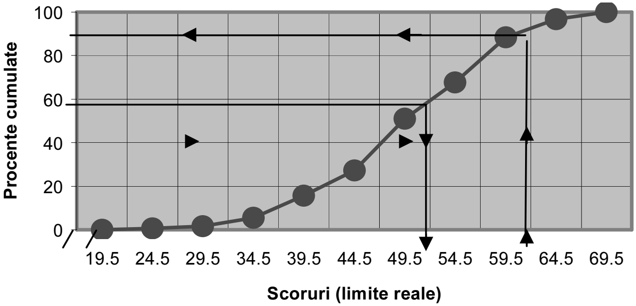
n = numărul total de cazuri.

Aplicând această formulă la exemplul nostru, avem:

$$RP_{47} \cong \frac{50 + \left(\dfrac{47 - 44{,}5}{5} \times 42\right)}{180} \times 100 = \frac{50 + 21}{180} \times 100 = 39{,}4$$

Percentilele şi rangul percentilelor pentru date grupate pot fi aproximate şi folosind ogivele. Pentru exemplificare, să folosim ogiva construită în capitolul anterior pentru scorurile celor 180 de subiecți:

Figura 3.4. Ogivă pentru scorurile obținute la un test de cunoștințe



Pentru a afla, de pildă, P_{58}, din punctul 58 de pe axa procentelor trasăm o paralelă cu axa scorurilor care să intersecteze curba, iar din punctul de intersecție trasăm o perpendiculară pe axa scorurilor. Punctul de intersecție al acestei perpendiculare cu axa scorurilor este P_{58}. Pentru a afla RP_{62}, din punctul 62 de pe axa scorurilor trasăm o paralelă cu axa procentelor care să intersecteze curba, iar din punctul de intersecție trasăm o perpendiculară pe axa procentelor. Punctul de intersecție al acestei perpendiculare cu axa procentelor este RP_{62}.

3.3. MĂRIMILE DISPERSIEI

Descrierea unei distribuții de scoruri cu ajutorul mărimilor tendinței centrale nu epuizează informația relevantă statistic despre distribuția respectivă. Pentru descrierea completă a unei distribuții de scoruri trebuie să considerăm și **mărimile dispersiei**. Aceste mărimi furnizează informație despre eterogenitatea sau varietatea unei distribuții de scoruri.

De pildă, o medie aritmetică de 6,33 poate fi obținută dintr-o mulțime de scoruri similare, concentrate în jurul acestei valori — precum 6, 6,

7 — sau dintr-o mulţime de scoruri nesimilare, împrăştiate în raport cu această valoare — precum 1, 8, 10. În cazul unor scoruri similare sau cu *variabilitate scăzută*, media aritmetică este mai adecvată pentru măsurarea tendinţei centrale decât în cazul unor scoruri nesimilare sau cu *variabilitate înaltă*. Luând un exemplu pur didactic, informaţia conform căreia media aritmetică a vârstelor dintr-un eşantion este de 25 de ani este relevantă dacă vârstele subiecţilor din eşantion sunt relativ grupate în jurul acestei valori şi este neimportantă dacă eşantionul respectiv este alcătuit din două grupuri, unul cu vârste cuprinse între 1 şi 10 ani, celălalt cu vârste cuprinse între 40 şi 50 de ani.

În această secţiune sunt introduse cele mai des folosite mărimi ale dispersiei: indicele variaţiei calitative, amplitudinea şi amplitudinea intercuartilică, abaterea medie, varianţa, abaterea standard şi coeficientul de variaţie. Fiecare dintre aceste mărimi furnizează o indicaţie precisă a eterogenităţii unei distribuţii de scoruri.

3.3.1. INDICELE VARIAŢIEI CALITATIVE

Indicele variaţiei calitative (*IQV*)[13] reprezintă raportul dintre variaţia observată efectiv într-o distribuţie de scoruri şi variaţia maxim posibilă pentru acea distribuţie. *IQV* poate lua valori cuprinse între 0,00 (nici o variaţie sau variaţie nulă) şi 1,00 (variaţie maximă). Acest indice se foloseşte în mod obişnuit pentru variabile măsurate la nivel nominal, putând fi utilizat şi pentru variabile măsurate la celelalte niveluri, dacă scorurile respective sunt grupate în distribuţii de frecvenţe.

Pentru ilustrare, să presupunem că un cercetător este interesat în compararea eterogenităţii religioase a trei colectivităţi — *A*, *B* şi *C* —, datele obţinute fiind cele din tabelul următor:

[13] Prescurtarea de la denumirea acestei mărimi în limba engleză: *Index of Qualitative Variation*.

Tabelul 3.9 Apartenența religioasă în trei colectivități

Denominația	Colectivitatea		
	A	B	C
Creştin-ortodox	90	60	30
Catolic	0	20	30
Altele	0	10	30
TOTAL	90	90	90

Simpla inspecție a datelor din acest tabel arată că, dintre cele trei colectivități, *A* este cea mai puțin eterogenă. Mai exact, eterogenitatea religioasă în colectivitatea *A* este nulă, întrucât toți membrii acestei colectivități sunt creştin–ortodocşi. Apoi, colectivitatea *C* este cea mai eterogenă, *B* situându-se între *A* şi *C*. Să vedem acum cum sunt reflectate aceste observații de către *IQV*, a cărui formulă de calcul este următoarea:

Formula 3.7. $$IQV = \frac{k(n^2 - \sum f^2)}{n^2(k-1)}$$

în care k = numărul de categorii;

n = numărul total de cazuri din cele k categorii;

$\sum f^2$ = suma pătratelor frecvențelor din fiecare categorie.

Să aplicăm această formulă la fiecare dintre cele trei distribuții de frecvențe. Pentru aceasta, trebuie să calculăm mai întâi suma pătratelor frecvențelor respective. Astfel, pentru colectivitatea *A*, avem:

$$\sum f^2 = 90^2 + 0^2 + 0^2 = 8100$$

$$IQV = \frac{3(90^2 - 8100)}{90^2(3-1)} = \frac{3(8100 - 8100)}{8100 \cdot 2} = \frac{3 \cdot 0}{16200} = \frac{0}{16200} = 0$$

Întrucât valorile pentru k şi n sunt aceleaşi în toate cele trei distribuţii, *IQV* pentru celelalte două colectivităţi poate fi calculat schimbând doar valorile pentru $\sum f^2$. Pentru colectivitatea *B*, avem:

$$\sum f^2 = 60^2 + 20^2 + 10^2 = 4100$$

$$IQV = \frac{3(8100 - 4100)}{16200} = \frac{3 \cdot 4000}{16200} = \frac{12000}{16200} = 0{,}74$$

Pentru colectivitatea *C*:

$$\sum f^2 = 30^2 + 30^2 + 30^2 = 2700$$

$$IQV = \frac{3(8100 - 2700)}{16200} = \frac{3 \cdot 5400}{16200} = \frac{16200}{16200} = 1{,}00$$

După cum se poate constata, *IQV* reflectă cantitativ şi precis observaţiile de mai sus. Colectivitatea *A* prezintă o variaţie nulă a variabilei măsurate (*IQV* = 0), colectivitatea *C* prezintă variaţia maxim posibilă pentru aceste date (*IQV* = 1,00), iar colectivitatea *B* se situează între *A* şi *C*, cu o variaţie substanţială (*IQV* = 0,74).

3.3.2. AMPLITUDINEA ŞI AMPLITUDINEA INTERCUARTILICĂ

Amplitudinea (*A*) este o mărime a dispersiei uşor de calculat, cu care ne-am întâlnit deja în capitolul anterior, definită drept diferenţa dintre cel mai mare scor şi cel mai mic scor din mulţimea scorurilor date:

$$A = X_{max} - X_{min}$$

Pentru datele din tabelul 2.4, de pildă, *A* = 69 – 24 = 45. În cazul unei distribuţii de frecvenţe cu date grupate, amplitudinea absolută se aproximează prin diferenţa dintre limita de clasă reală superioară a ultimului interval şi limita de clasă reală inferioară a primului interval[14]:

---

[14] Considerând intervalele de clasă în ordine crescătoare.

$$A = LCRS_{max} - LCRI_{min}$$

Astfel, pentru datele din tabelul 3.6, $A \cong 69{,}5 - 19{,}5 = 50$.

Amplitudinea intercuartilică (Q) se defineşte ca diferența dintre cea de-a treia şi prima cuartilă a unei distribuții de scoruri ordonate crescător:

$$Q = Q_3 - Q_1$$

Să considerăm din nou un exemplu prezentat în secțiunea 3.2. Fie următoarea mulțime ordonată de 15 scoruri:

2, 4, 4, 5, 7, 8, 10, 12, 17, 18, 18, 21, 27, 29, 30

5 → Q_1; 12 → $\tilde{X}$; 21 → Q_3

În acest exemplu, $A = 30 - 2 = 28$ şi $Q = 21 - 5 = 16$.

Întrucât se iau în considerare doar scorurile extreme dintr-o distribuție, A nu este o mărime suficient de semnificativă a dispersiei. Pot fi întâlnite distribuții în care scorurile extreme sunt foarte depărtate de scorurile intermediare, caz în care aprecierea dispersiei pe baza amplitudinii este o greşeală. De asemenea, amplitudinea nu oferă informații despre natura scorurilor dintre cele două extreme: dacă scorurile sunt grupate în centrul distribuției, dacă sunt împrăştiate omogen între cele două scoruri extreme, dacă sunt concentrate în două grupe, câte una lângă fiecare extremă, distribuția fiind bimodală etc. Q ia în considerare 50% dintre cazurile aflate în centrul distribuției[15] şi astfel evită problema de a fi o mărime bazată pe scorurile extreme. Pe de altă parte, întrucât, ca şi A, ia în considerare doar două scoruri dintr-o distribuție, Q nu oferă informație despre natura scorurilor dintre cele două scoruri considerate, astfel că împărtăşeşte celelalte dezavantaje asociate cu A. Totuşi, aceste mărimi sunt utile atunci când dorim să obținem rapid o măsură a variabilității unei distribuții şi, mai ales, atunci când dorim să realizăm rapid o comparație între variabilitățile a două distribuții cu un număr egal de scoruri. Să presupunem, de pildă, că am înregistrat vârstele subiecților din două eşantioane, obținând următoarele date:

Eşantionul 1	11, 16, 18, 23, 29, 31, 37
Eşantionul 2	18, 19, 21, 23, 24, 26, 29

---

[15] Amintiți-vă că $Q_1 = P_{25}$ şi $Q_3 = P_{75}$.

Mediile aritmetice pentru cele două eşantioane sunt $\overline{X}_1 = 23{,}57$ şi $\overline{X}_2 = 22{,}86$, mediana fiind aceeaşi pentru ambele eşantioane: 23. Întrucât amplitudinea vârstelor din primul eşantion, 26, este mai mare decât amplitudinea vârstelor din cel de-al doilea eşantion, 11, primul eşantion este mai eterogen din punctul de vedere al vârstelor.[16]

3.3.3. ABATEREA MEDIE ŞI VARIANȚA

Mărimile dispersiei expuse în continuare captează ideea de variabilitate a unei distribuții de scoruri de interval sau de raport față de centrul acelei distribuții, mai precis, față de media sa aritmetică şi folosesc *toate* scorurile distribuției.

Ştim că într-o distribuție de scoruri de interval sau de raport cu media aritmetică $\overline{X}$, diferența $X_i - \overline{X}$ reprezintă *abaterea* scorului X_i față de media aritmetică $\overline{X}$. O sugestie pentru a obține o mărime mai adecvată a dispersiei ar fi să însumăm toate abaterile scorurilor individuale față de medie şi să împărțim suma astfel obținută la numărul total de scoruri, *n*. Mai ştim, însă, că pentru orice distribuție de scoruri, suma abaterilor scorurilor de la media lor aritmetică este egală cu zero, $\sum(X_i - \overline{X}) = 0$, astfel că rezultatul împărțirii acestei sume la *n* ar fi întotdeauna 0. Pentru a folosi cumva sugestia menționată, avem la dispoziție două posibilități: sau neglijăm semnele abaterilor, considerând *valorile absolute* ale acestora[17], sau ridicăm la pătrat abaterile, întrucât dacă se înmulțesc două numere care au semnul minus, produsul este pozitiv.

Prima posibilitate conduce la o mărime a dispersiei, numită **abaterea medie** şi notată cu $\overline{d}$, a cărei formulă de calcul este următoarea:

---

[16] De notat că, uneori, mărimea *A* este numită *amplitudine absolută*, prin contrast cu *amplitudinea relativă* (*A*%), definită ca raportul dintre amplitudinea absolută a unei mulțimi de scoruri şi media sa aritmetică. De obicei, amplitudinea relativă se înmulțeşte cu 100 şi se prezintă ca procent. Amplitudinea relativă nu are întotdeauna sens intuitiv atunci când se doreşte aprecierea omogenității unei singure distribuții; de pildă, în cazul eşantionului 1 din ultimul exemplu de mai sus, *A*% = 110%.

[17] Revedeți capitolul 1, secțiunea 1.2.

Formula 3.8. $$\bar{d} = \frac{\sum |X_i - \bar{X}|}{n}$$

Cea de-a doua posibilitate conduce la o altă mărime a dispersiei, numită **varianță**[18], notată cu s^2 atunci când este vorba despre un eşantion şi cu σ^2 atunci când este vorba despre o populație. Formula de calcul a varianței pentru populații este următoarea:

Formula 3.9. $$\sigma^2 = \frac{\sum (X_i - \mu)^2}{N}$$

în care μ = media aritmetică a populației;
N = numărul total de scoruri din populație.

Formula de calcul a varianței pentru eşantioane diferă de formula 3.9 sub două aspecte: în locul mediei aritmetice a populației (μ) apare media aritmetică a eşantionului ($\bar{X}$), iar la numitor, în locul numărului total de scoruri din populație (N) apare numărul total de scoruri din eşantion diminuat cu o unitate ($n - 1$)[19].

Formula 3.10 $$s^2 = \frac{\sum (X_i - \bar{X})^2}{n-1}$$

Pentru a ilustra calculul abaterii medii şi al varianței, vom folosi datele din tabelul 3.2, adăugând o coloană pentru modulele diferențelor $X_i - \bar{X}$ şi, pentru o simplificare pe care o vom folosi ulterior, o coloană pentru pătratele scorurilor individuale, X_i^2:

---

[18] Uneori, această mărime este numită chiar *dispersie*.

[19] După cum vom vedea în capitolele dedicate statisticii inferențiale, mărimile statistice pentru eşantioane servesc drept *estimatori* ai valorilor respective pentru populație, unii estimatori fiind *nedistorsionați*, alții fiind *distorsionați*. Întrucât varianța pentru un eşantion este un estimator distorsionat al varianței pentru populație, numitorul $n - 1$ are rolul de a corecta distorsiunea. Aceleaşi considerații sunt valabile şi pentru abaterea standard. În cadrul statisticii descriptive, unii statisticieni preferă să folosească numitorul n, tratând eşantioanele ca şi cum ar fi populații foarte mici.

Tabelul 3.10. Calculul abaterii medii şi al varianței ($\overline{X} = 19$)

X_i	X_i^2	$X_i - \overline{X}$	$\lvert X_i - \overline{X} \rvert$	$(X_i - \overline{X})^2$
16	256	–3	3	9
17	289	–2	2	4
17	289	–2	2	4
17	289	–2	2	4
17	289	–2	2	4
18	324	–1	1	1
19	361	0	0	0
19	361	0	0	0
23	529	4	4	16
23	529	4	4	16
23	529	4	4	16
209	4 045	0	24	74

Pentru datele din acest exemplu, avem:

$$\overline{d} = \frac{\sum \lvert X_i - \overline{X} \rvert}{n} = \frac{24}{11} = 2,20$$

$$s^2 = \frac{\sum (X_i - \overline{X})^2}{n-1} = \frac{74}{10} = 7,40$$

De notat că varianța calculată cu ajutorul formulei 3.9 reprezintă *pătratul mediu al abaterilor*, i.e. media aritmetică a pătratelor abaterilor scorurilor populației de la media lor aritmetică μ.

În cazul eşantioanelor mari, aplicarea formulei definiționale 3.10 poate fi greoaie, mai ales dacă valoarea pentru $\overline{X}$ conține zecimale, ceea ce presupune multe rotunjiri. Din formula 3.10 se pot deduce alte formule de calcul care, aplicate la aceleaşi date, produc aceleaşi rezultate ca şi for-

mula 3.10 şi care permit calcularea mai uşoară şi mai rapidă a varianţei[20]. Prezentăm în continuare două astfel de formule, în care nu mai este nevoie de calcularea diferenţelor $X_i - \overline{X}$.

Formula 3.11. $$s^2 = \frac{\sum X_i^{\,2} - n\overline{X}^2}{n-1}$$

Formula 3.12.. $$s^2 = \frac{\sum X_i^{\,2} - \frac{\left(\sum X_i\right)^2}{n}}{n-1}$$

Aplicând formula 3.11 la datele din exemplul de mai sus, avem:

$$s^2 = \frac{\sum X_i^{\,2} - n\overline{X}^2}{n-1} = \frac{4045 - (11 \times 19^2)}{10} = \frac{4045 - 3971}{10} = \frac{74}{10} = 7{,}40$$

Deşi pare mai complicată decât formula 3.10, formula 3.12 ne scuteşte de calcularea mediei aritmetice a scorurilor, astfel încât pentru calcularea varianţei cu ajutorul acestei formule este nevoie doar de scorurile individuale. În exemplul nostru:

$$s^2 = \frac{\sum X_i^{\,2} - \frac{\left(\sum X_i\right)^2}{n}}{n-1} = \frac{4045 - \frac{209^2}{11}}{10} = \frac{4045 - 3971}{10} = \frac{74}{10} = 7{,}40$$

Formulele de calcul simplificat al varianţei pentru populaţii diferă de formulele de mai sus prin aceea că $\overline{X}$ se înlocuieşte cu μ, iar $n - 1$ devine N.

3.3.4. ABATEREA STANDARD ŞI COEFICIENTUL DE VARIAŢIE

Calculul varianţei implică ridicarea la pătrat a abaterilor scorurilor individuale faţă de media lor aritmetică (formulele 3.9 şi 3.10). În conse-

---

[20] Două formule de calcul care, aplicate la aceleaşi date, produc aceleaşi rezultate se numesc *echivalente algebric*.

cință, unitatea atașată varianței este pătratul unității atașate scorurilor individuale respective. Dacă, de pildă, este vorba despre scoruri exprimate în ani, varianța va fi exprimată în ani la pătrat. Pentru a se obține o mărime a variabilității care să fie exprimată în aceleași unități în care sunt exprimate scorurile respective, se ia rădăcina pătrată a varianței, s sau σ. Această mărime statistică se numește **abatere standard** și, în cazul eșantioanelor, se definește cu ajutorul următoarei formule:

Formula 3.13. $$s = \sqrt{\frac{\sum (X_i - \overline{X})^2}{n-1}}$$

Relația dintre abaterea standard și varianță fiind $s = \sqrt{s^2}$, valoarea abaterii standard pentru datele din tabelul 3.10 este $s = \sqrt{7{,}40} = 2{,}72$.

Corespunzător formulelor 3.11 și 3.12, avem următoarele formule de calcul simplificat al abaterii standard:

Formula 3.14. $$s = \sqrt{\frac{\sum X_i^2 - n\overline{X}^2}{n-1}}$$

Formula 3.15. $$s = \sqrt{\frac{\sum X_i^2 - \frac{\left(\sum X_i\right)^2}{n}}{n-1}}$$

Coeficientul de variație al unei distribuții de scoruri (CV) se definește ca raportul dintre abaterea standard a distribuției și media sa aritmetică. De obicei, coeficientul de variație se înmulțește cu 100 și se prezintă ca procent. Astfel, avem:

Formula 3.16. $$CV = \frac{s}{\overline{X}} \cdot 100$$

În exemplul folosit până acum, $CV = (2,72/19) \cdot 100 = 143,16$. Evident, în cazul populațiilor, s se înlocuieşte cu σ, iar $\overline{X}$ cu μ. Coeficientul de variație este cu deosebire util atunci când se doreşte compararea variabilității a două distribuții de scoruri cu medii aritmetice sensibil diferite.

3.3.5. CALCULUL ABATERII STANDARD PENTRU DATE GRUPATE

Formula de calcul a abaterii standard pentru date grupate se obține pe baza formulei 3.15. Pentru a aplica formula 3.15 trebuie să cunoaştem trei valori: suma scorurilor, ΣX_i, suma pătratelor scorurilor, ΣX_i^2, şi numărul de scoruri, n. Atunci când datele au fost grupate în distribuții de frecvențe nu cunoaştem distribuția exactă a scorurilor individuale şi deci nu putem determina exact primele două valori. Într-un astfel de caz, suma scorurilor se aproximează, ca şi pentru media aritmetică, înmulțind numărul de cazuri din fiecare interval, f_i, cu centrul intervalului respectiv, m_i, şi însumând aceste produse: $\Sigma f_i m_i$. Suma pătratelor scorurilor se aproximează ridicând la pătrat centrele de interval, înmulțind fiecare pătrat astfel obținut cu numărul de cazuri din intervalul respectiv şi însumând aceste produse: $\Sigma f_i m_i^2$. Avem astfel:

$$\Sigma X_i \cong \Sigma f_i m_i$$
$$\Sigma X_i^2 \cong \Sigma f_i m_i^2$$

Formula care dă valoarea aproximativă a abaterii standard pentru date grupate se obține făcând substituțiile corespunzătoare în formula 3.15. Obținem astfel:

Formula 3.17.

$$s \cong \sqrt{\frac{\sum f_i m_i^2 - \frac{\left(\sum f_i m_i\right)^2}{n}}{n-1}}$$

Pentru ilustrare, vom folosi datele din tabelul 3.7, în care vom adăuga două coloane: una pentru pătratele centrelor de interval şi una pentru produsele dintre pătratele centrelor de interval şi frecvențe:

Tabelul 3.11. Calculul abaterii standard pentru date grupate

Intervale de clasă	f	m	fm	m^2	fm^2
20–24	1	22	22	484	484
25–29	2	27	54	729	1 458
30–34	7	32	224	1 024	8 428
35–39	18	37	666	1 369	24 642
40–44	22	42	924	1 764	38 808
45–49	42	47	1 974	2 209	92 778
50–54	30	52	1 560	2 704	81 120
55–59	37	57	2 109	3 249	120 213
60–64	15	62	930	3 844	57 660
65–69	6	67	402	4 489	26 934
TOTAL	180		8 865		452 525

Totalul ultimei coloane este valoarea pentru $\Sigma f_i m_i^2$. Aplicând formula 3.17 la aceste date obținem:

$$s \cong \sqrt{\frac{\sum f_i m_i^2 - \frac{\left(\sum f_i m_i\right)^2}{n}}{n-1}} = \sqrt{\frac{452525 - \frac{8865^2}{180}}{179}} =$$

$$\sqrt{\frac{452525 - 436601{,}25}{179}} =$$

$$= \sqrt{\frac{15923{,}75}{179}} = \sqrt{88{,}96} = 9{,}43$$

De notat că, pentru datele negrupate corespunzătoare acestui exemplu, abaterea standard calculată cu ajutorul uneia dintre formulele 3.13 – 3.15 este egală cu 9,00.

*

* *

Pentru a descrie adecvat o distribuţie de scoruri trebuie să răspundem la trei întrebări: *Care este forma distribuţiei? Care este scorul său mediu? Cât de variate sunt scorurile?* Modalităţile de răspuns la prima întrebare au fost discutate în capitolul 2. Răspunsurile la ce-a de-a doua întrebare au fost abordate în prima parte a acestui capitol. Am văzut că, în statistică, „scor mediu“ are trei înţelesuri diferite, cărora le corespund trei mărimi statistice: media aritmetică, mediana şi modul. Media aritmetică, aplicabilă numai pentru date de interval sau de raport, exprimă *scorul tipic* al unei distribuţii. Mediana poate fi folosită şi pentru nivelul ordinal de măsură şi reflectă *scorul central* al unei distribuţii. Modul poate fi folosit la orice nivel de măsură şi reprezintă *cel mai întâlnit scor* într-o distribuţie. În plus, am prezentat modalităţi de descriere a poziţiei scorurilor individuale într-o distribuţie de interval sau de raport: percentilele şi rangul percentilelor. În capitolul următor vom prezenta un alt cadru de referinţă pentru interpretarea scorurilor individuale: scorurile standard.

În cea de-a doua parte a acestui capitol am prezentat modalităţi de a răspunde la cea de-a treia întrebare: indicele variaţiei calitative, amplitudinea şi amplitudinea intercuartilică, abaterea medie, varianţa, abaterea standard şi coeficientul de variaţie. Abaterea standard este cea mai des folosită mărime a dispersiei pentru date de interval şi de raport, având avantajul de a fi exprimată în aceleaşi unităţi de măsură ca şi scorurile respective. Valoarea abaterii standard este cu atât mai mare cu cât distribuţia scorurilor este mai eterogenă sau, altfel spus, cu cât variabilitatea distribuţiei este mai mare. Reciproc, valoarea abaterii standard este cu atât mai mică cu cât distribuţia scorurilor este mai omogenă sau, altfel spus, cu cât variabilitatea distribuţiei este mai mică. Dacă fiecare caz într-o distribuţie ar avea acelaşi scor, atunci abaterea standard pentru distribuţia respectivă ar fi 0. Astfel, abaterea standard nu are limită superioară, iar limita sa inferioară este 0. Abaterea standard îşi dovedeşte utilitatea mai ales atunci când se doreşte compararea a două sau mai multe distribuţii. De asemenea, după cum vom vedea în capitolul următor, abaterea standard este implicată şi în calculul *scorurilor standard* şi în noţiunea de *distribuţie normală standard.*

GLOSAR

Abatere standard: rădăcina pătrată a câtului dintre suma abaterilor pătratice ale scorurilor față de media lor aritmetică şi *n* -1 pentru eşantioane sau *N* pentru populații.
Abatere medie: media aritmetică a sumei abaterilor absolute ale scorurilor față de media lor aritmetică.
Amplitudinea absolută: diferența dintre cel mai mare scor şi cel mai mic scor dintr-o mulțime de scoruri.
Amplitudine intercuartilică: diferența dintre cea de-a treia şi prima cuartilă a unei distribuții de scoruri ordonate crescător.
Asimetrie: proprietatea unei mulțimi de scoruri de a avea puține scoruri foarte mari (asimetrie pozitivă) sau puține scoruri foarte mici (asimetrie negativă).
Coeficient de variație: raportul dintre abaterea standard a unei distribuții de scoruri şi media sa aritmetică. De obicei, coeficientul de variație se înmulțeşte cu 100 şi se prezintă ca procent.
Indicele variației calitative: raportul dintre variația observată efectiv într-o distribuție de scoruri şi variația maxim posibilă pentru acea distribuție.
Interval modal: intervalul de clasă care conține cel mai mare număr de cazuri.
Mărimile tendinței centrale: mărimi statistice care rezumă o întreagă distribuție de scoruri, descriind cea mai tipică sau centrală valoare a distribuției respective sub forma unui singur număr sau a unei singure categorii.
Mărimile dispersiei: mărimi statistice care furnizează informație despre eterogenitatea sau varietatea unei distribuții de scoruri.
Medie aritmetică ponderată: media aritmetică a mai multor grupuri combinate.
Medie aritmetică: rezultatul împărțirii sumei tuturor scorurilor dintr-o mulțime de scoruri la numărul total de scoruri din acea mulțime.
Mediană: punct într-o mulțime de scoruri față de care numărul de cazuri cu scoruri mai mici sau egale este egal cu numărul de cazuri cu scoruri mai mari sau egale.
Mod: scorul care apare cel mai frecvent într-o mulțime de scoruri.
Percentilă: valoarea P*m* a unei mulțimi de scoruri față de care *cel mult m%* din scoruri sunt mai mici decât *m* şi *cel mult* (100 – *m*)*%* din scoruri sunt mai mari decât *m*.
Varianță: câtul dintre suma abaterilor pătratice ale scorurilor față de media lor aritmetică şi *n* -1 pentru eşantioane sau *N* pentru populații.

4

DISTRIBUȚIA NORMALĂ

Noțiunea de distribuție normală este de mare importanță în statistică. Pe de o parte, distribuția normală poate fi folosită în combinație cu abaterea standard pentru a formula enunțuri descriptive precise despre distribuțiile scorurilor unor variabile. Pe de altă parte, distribuția normală stă la baza multor tehnici statistice inferențiale.

4.1. CARACTERISTICILE DISTRIBUȚIEI NORMALE

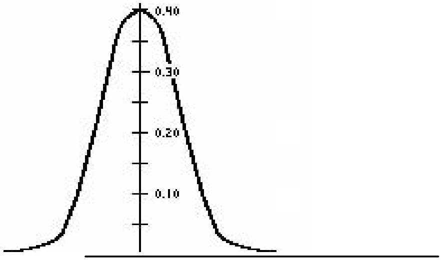
Distribuția normală este o distribuție teoretică de scoruri unimodală, simetrică şi continuă. Graficul unei distribuției normale are formă de clopot cu ambele extremități extinse la infinit[21]. Ca atare, un astfel de grafic, numit şi **curba normală**[22], nu atinge axa orizontală sau, altfel spus, este asimptotic față de axa orizontală, după cum se ilustrează în figura 4.1.

---

[21] Distribuția normală a fost studiată pentru prima dată în secolul al XVIII-lea de către Abraham De Moivre. La începutul secolului al XIX-lea a fost descoperită independent de Carl Friedrich Gauss şi Pierre Simon de Laplace.

[22] În onoarea matematicienilor Gauss şi Laplace, curba normală este cunoscută şi sub numele de *clopotul lui Gauss* sau *curba Gauss–Laplace*.

Figura 4.1. Un exemplu de curbă normală



Distribuția normală este un model teoretic ce poate fi folosit pentru a descrie distribuții particulare ale scorurilor unor variabile măsurate la nivel de interval sau de raport, despre care s-a constatat că aproximează suficient normalitatea într-o populație, precum coeficientul de inteligență, rezultatele obținute la diferite teste de cunoştințe sau numărul de erori comise în îndeplinirea anumitor sarcini. Scorurile unor astfel de variabile tind să se grupeze simetric în jurul scorului central, dând naştere unui grafic de distribuție în formă de clopot. Dacă distribuția scorurilor unei variabile într-o populație aproximează normalitatea, se spune că variabila respectivă este *normal distribuită* în populația respectivă sau, pe scurt, că variabila respectivă este *normală*. Pe de altă parte, după cum vom vedea în capitolele următoare, distribuția normală poate fi folosită pentru a reprezenta diferite mărimi statistice care rezultă din studierea unor eşantioane dintr-o populație dată, ceea ce permite obținerea unor concluzii despre valorile pentru populație pe baza valorilor cunoscute pentru eşantioane. Utilizarea distribuției normale în statistică face apel la aşa-numitele *scoruri standard* sau *scoruri Z.*

4.2. CALCULUL SCORURILOR STANDARD

Scorurile standard, numite şi **scoruri *Z***, folosesc abaterea standard ca unitate de măsură şi descriu poziția relativă a unui scor individual în

raport cu întreaga mulțime de scoruri din care face parte. Formula de calcul pentru scorurile Z ale unei populații este următoarea:

Formula 4.1. $$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

Această formulă transformă orice scor „brut“ X în scorul Z corespunzător. Numărătorul fracției, $X - \mu$, indică distanța în unități brute a scorului X față de media aritmetică. Prin împărțirea acestei distanțe la σ aflăm distanța în abateri standard sau fracțiuni de abateri standard a scorului X față de medie. Corespunzător, formula de calcul pentru scorurile Z ale unui eșantion este următoarea:

Formula 4.2. $$Z = \frac{X - \overline{X}}{s}$$

Pentru ilustrare, să considerăm o distribuție de scoruri pentru un eșantion, în care $\overline{X} = 100$ şi $s = 20$. În acest caz, scorurile Z corespunzătoare scorurilor brute 85, 120 şi 150 sunt:

$$Z_{85} = \frac{85 - 100}{20} = -0{,}75$$

$$Z_{120} = \frac{120 - 100}{20} = +1{,}00$$

$$Z_{150} = \frac{150 - 100}{20} = +2{,}50$$

Fiecare dintre aceste scoruri Z arată la câte abateri standard față de media aritmetică se află scorul brut corespunzător. Un scor Z negativ arată că scorul brut se află sub media aritmetică, iar un scor Z pozitiv arată că scorul brut este mai mare decât media aritmetică. Evident, un scor Z egal cu 0 arată că scorul brut corespunzător este egal cu media aritmetică.

Se demonstrează că dacă toate scorurile unei distribuții particulare se transformă în scoruri Z, atunci:

- forma distribuției scorurilor *Z* este aceeaşi cu cea a distribuției inițiale;
- media aritmetică a distribuției scorurilor *Z* este 0, indiferent de valoarea mediei aritmetice a distribuției inițiale;
- abaterea standard a distribuției scorurilor *Z* este 1, indiferent de valoarea abaterii standard a distribuției inițiale.

Aceste proprietăți au fost generalizate în studiul distribuției normale standard.

4.3. DISTRIBUȚIA NORMALĂ STANDARD

Ca şi în cazul unei distribuții particulare de scoruri de interval sau de raport, distribuția normală poate fi descrisă cu ajutorul mediei sale aritmetice şi al abaterii standard. Întrucât oricărei perechi de valori pentru media aritmetică şi abaterea standard îi corespunde o distribuție normală, matematic vorbind există o infinitate de distribuții normale, ale căror forme exacte depind de mărimile menționate. Pentru a descrie efectiv distribuțiile unor variabile normale, în analiza statistică se consideră o distribuție normală particulară, numită **distribuția normală standard**. Variabila corespunzătoare distribuției normale standard este numită **variabila normală standard**, valorile acestei variabile fiind scoruri *Z*. Din acest motiv, această distribuție se mai numeşte şi *distribuția Z*. Prin convenție, media aritmetică a distribuției normale standard se ia ca origine a variației variabilei normale standard, ceea ce înseamnă că această distribuție are media aritmetică egală cu 0. De asemenea, se consideră că abaterea standard a distribuției normale standard este egală cu unitatea.

Graficul corespunzător distribuției normale standard este numit **curba normală standard**. Aria delimitată de curba normală standard este proporțională cu frecvența scorurilor, astfel că proporția de cazuri cuprinse între un scor *Z* şi media aritmetică poate fi aflată cu ajutorul calculului integral. Statisticienii au determinat cu precizie aceste arii, rezultatele fiind organizate sub forma unui tabel, numit **tabelul curbei normale standard** sau **tabelul ariilor de sub curba normală standard** (vezi Anexa A). Schema generală a acestui tabel este prezentată în figura 4.2.

Figura 4.2 Schema tabelului curbei normale standard

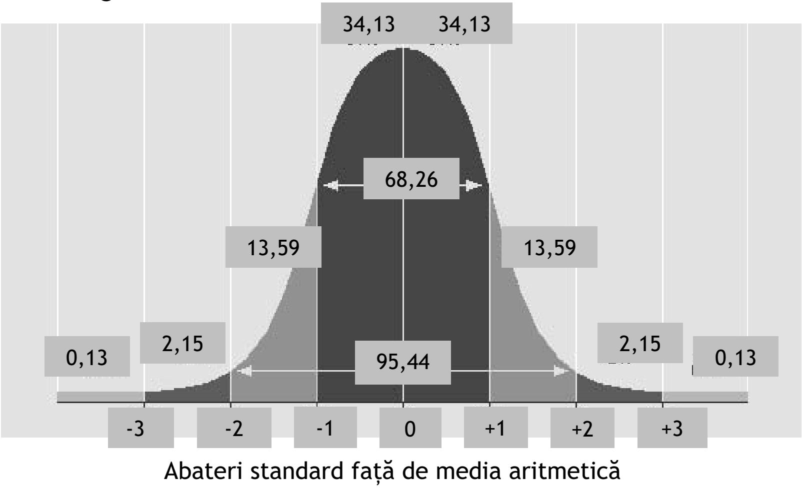
Z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	....
0,0	0000						
0,1							
0,2							
0,3							
0,4						1 736	
0,5							
⋮							

În corpul tabelului apar numere alcătuite din patru cifre. Aceste numere reprezintă ariile cuprinse între un scor *Z* dat şi media aritmetică. Numerele înscrise în prima coloană din stânga, etichetată *Z*, reprezintă primele două cifre ale unui scor *Z*, iar numerele înscrise pe primul rând de sus reprezintă cea de-a treia cifră. De pildă, pentru a afla aria cuprinsă între un scor $Z = 0,45$ şi media aritmetică, se coboară în prima coloană din stânga până la 0,4 (primele două cifre ale scorului *Z* considerat) şi apoi se parcurge spre dreapta rândul respectiv până când se ajunge sub 0,05 (cea de-a treia cifră). Numărul găsit la intersecţia acestor două coordonate este 1 736, care poate fi citit sau ca un procent (17,36%), sau ca o proporţie (0,1736). În primul caz vom spune că 17,35% din aria totală a curbei normale standard se află între scorul $Z = 0,45$ şi media aritmetică (punct în care $Z = 0$); în cel de-al doilea caz vom spune că proporţia dintre aria totală a curbei normale standard cuprinsă între scorul $Z = 0,45$ şi media aritmetică este de 0,1736. Întrucât orice curbă normală este simetrică, aceeaşi procedură se aplică şi pentru afla aria cuprinsă între un scor *Z* negativ şi media aritmetică. Astfel, rezultatul de mai sus poate fi interpretat spunând că 17,35% din aria totală a curbei normale standard se află între scorul $Z = -0,45$ şi media aritmetică.

4.4. UTILIZAREA DISTRIBUȚIEI NORMALE STANDARD

Figura 4.3 ilustrează utilizarea tabelului distribuției normale standard pentru determinarea procentelor din aria delimitată de curba normală, aflate între un scor *Z* dat şi media aritmetică (*Z* = 0).

Figura 4.3. Procente din aria de sub curba normală



De pildă, din tabel aflăm că între *Z* = +1 şi media aritmetică se află 34,13% din aria de sub curbă (v. intersecția coordonatelor 1,0 şi 0,00). Întrucât curba este simetrică, procentul din arie cuprins între *Z* = –1 şi media aritmetică este tot de 34,13%. Astfel, între ±1 abateri standard față de medie se află 68,26% din aria totală. Similar, între *Z* = +2 şi medie se află 47,72% din arie, astfel că între ±2 abateri standard față de medie se află 94,44% din arie.

Întrucât un procent relativ mic din aria totală se află peste +3 abateri standard sau sub –3 abateri standard (0,13%), pentru scopuri practice, ilustrate în cele ce urmează, se consideră că distribuția normală se extinde de la *Z* ≅ –3,59 la *Z* ≅ +3,59 sau, altfel spus, la 3,59 abateri standard de o

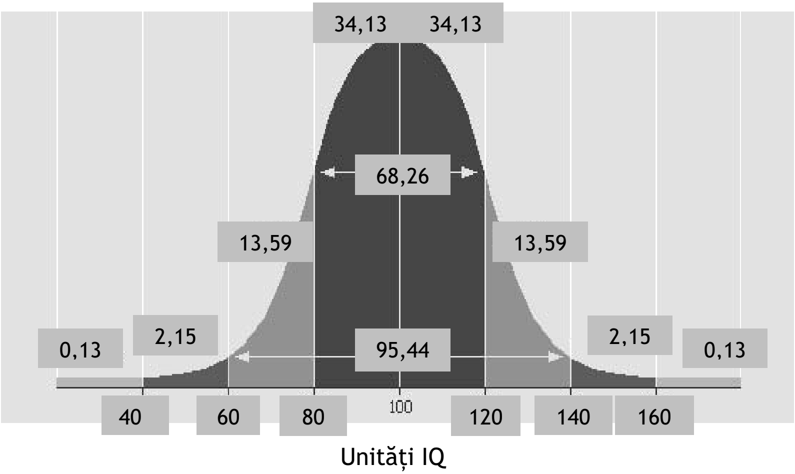
parte şi de cealaltă a mediei aritmetice, scorurile Z aflate dincolo de aceste limite fiind considerate a fi egale cu 0.

În cazul variabilelor normal distribuite pentru care cunoaştem media aritmetică şi abaterea standard, distribuția normală standard poate fi folosită pentru a determina diferite procente sau proporții de cazuri în distribuții particulare, precum şi pentru a determina probabilitatea de a selecta la întâmplare un scor cuprins într-o plajă dată de scoruri ale unei distribuții aproximativ normale.

4.4.1. DETERMINAREA PROCENTELOR DE CAZURI

Să considerăm o distribuție de scoruri a variabilei *coeficient de inteligență* (IQ) pentru un eşantion de 1 000 de subiecți cu $\overline{X} = 100$ şi $s = 20$, ilustrată în figura 4.4.

Figura 4.4. Distribuția scorurilor IQ pentru un eşantion de 1 000 de subiecți



Să presupunem că ne interesează procentul de cazuri cu scoruri IQ mai mici decât 115. Calculăm mai întâi scorul *Z* corespunzător scorului brut 115:

$$Z = \frac{115 - 100}{20} = +0,75$$

Din tabelul curbei normale aflăm că aria dintre scorul $Z = +0,75$ şi media aritmetică reprezintă 27,34% din aria totală. Întrucât aria aflată sub media aritmetică reprezintă 50% din aria totală, procentul de subiecţi cu scoruri IQ mai mici decât 115 este de 74,34% (27,34% + 50%). Acest rezultat poate fi exprimat şi în număr de cazuri, spunând că aproximativ 743 de subiecţi din eşantionul considerat (74,34% din 1000) au scoruri IQ mai mici decât 115.

Să presupunem acum că ne interesează procentul de cazuri cu scoruri IQ mai mici decât 75. Scorul *Z* corespunzător scorului brut 75 este:

$$Z = \frac{75 - 100}{20} = -1,25$$

Pentru a afla aria de sub un scor *Z* negativ, aria dintre scor şi media aritmetică se scade din 50% (aria aflată la stânga mediei). Din tabelul curbei normale aflăm că aria dintre scorul $Z = -1,25$ şi media aritmetică reprezintă 39,44% din aria totală. Astfel, procentul de subiecţi cu scoruri IQ mai mici decât 75 este de 10,56% (50% – 39,44%), ceea ce înseamnă că aproximativ 394 de subiecţi (39,44% din 1 000) au scoruri IQ mai mici decât 75.

Acelaşi model de calcul se utilizează pentru a afla aria situată deasupra unui scor *Z* pozitiv. Să presupunem că ne interesează procentul de cazuri cu scoruri mai mari decât 150. Ştim că scorul *Z* corespunzător acestui scor brut este +2,50. Din tabelul curbei normale aflăm că aria dintre scorul $Z = +2,50$ şi media aritmetică reprezintă 47,98% din aria totală, astfel că procentul de subiecţi cu scoruri mai mari decât 150 este de 2,02% (50% – 47,98%). Aceasta înseamnă că aproximativ 20 de subiecţi (2,02% din 1 000) au scoruri IQ mai mari decât 150.

În general, ariile situate peste sau sub un anumit scor *Z* se determină conform următoarelor reguli:

1. Pentru a determina aria aflată sub un scor Z negativ sau peste un scor Z pozitiv, aria dintre scorul respectiv şi media aritmetică se scade din 50%.
2. Pentru a determina aria aflată sub un scor Z pozitiv sau peste un scor Z negativ, aria dintre scorul respectiv şi media aritmetică se adună cu 50%.

Să vedem acum felul în care se determină ariile, respectiv procentele de cazuri dintre două scoruri. Să presupunem că ne interesează procentul de subiecți cu scoruri IQ cuprinse între 95 şi 125. Scorurile Z corespunzătoare acestor scoruri brute sunt

$$Z_{95} = \frac{95 - 100}{20} = -0,25$$

$$Z_{110} = \frac{125 - 100}{20} = +1,25$$

Din tabelul curbei normale aflăm că aria dintre scorul $Z = -0,25$ şi media aritmetică reprezintă 9,87% din aria totală şi că aria dintre scorul $Z = +1,25$ şi media aritmetică reprezintă 39,44% din aria totală. Fiind vorba despre scoruri aflate de o parte şi de alta a mediei, aria dintre scoruri se determină adunând ariile dintre fiecare scor şi media aritmetică. Astfel, procentul de subiecți cu scoruri IQ cuprinse între 95 şi 125 este de 49,31% (9,87% + 39,44%). Aceasta înseamnă că aproximativ 439 de subiecți au scoruri IQ cuprinse între 95 şi 125.

Pentru a determina aria dintre două scoruri aflate de aceeaşi parte a mediei aritmetice, se determină mai întâi ariile dintre fiecare scor şi medie, după care aria mai mică se scade din aria mai mare. Să presupunem că ne interesează procentul de subiecți cu scoruri IQ cuprinse între 115 şi 125. Ştim că scorurile Z corespunzătoare scorurilor brute 115 şi 125 sunt, respectiv, +0,75 şi +1,25. Ştim, de asemenea, că între $Z = +0,75$ şi media aritmetică se află 27,34% din aria totală şi că între $Z = +1,25$ şi media aritmetică se află 39,44% din aria totală. Prin urmare, procentul de subiecți cu scoruri IQ cuprinse între 115 şi 125 este de 12,10% (39,44% –27,34%), ceea ce înseamnă că aproximativ 121 de subiecți au scoruri IQ cuprinse între 115 şi 125. Acelaşi model de calcul se utilizează atunci când ambele scoruri se află sub medie.

4.4.2.. DETERMINAREA PROBABILITĂȚILOR PENTRU SCORURI

Tabelul curbei normale standard poate fi utilizat pentru a determina probabilitatea de a selecta la întâmplare un scor cuprins într-o plajă dată de scoruri ale unei distribuții aproximativ normale. Înainte de a considera acest tip de utilizare, să examinăm pe scurt noțiunea de probabilitate.

Pentru a estima probabilitatea producerii unui eveniment, trebuie să definim evenimentele care reprezintă cazuri favorabile. Un **caz favorabil** este un caz în care se produce evenimentul a cărui probabilitate de apariție dorim să o estimăm sau, pe scurt, un caz care realizează acel eveniment. Să presupunem că într-o urnă sunt n bile de culori diferite, dintre care exact m sunt albe şi că ne interesează probabilitatea de a extrage de la prima încercare o bilă albă. Evenimentul fiind apariția unei bile albe, cazul favorabil este extragerea unei bile albe. Față de cazul favorabil, vom spune că extragerea unei bile de orice culoare este un *caz egal posibil*. Avem astfel m cazuri favorabile şi n cazuri egal posibile. Probabilitatea teoretică a unui eveniment E, notată $\Pr(E)$ se defineşte ca raportul dintre numărul m al cazurilor favorabile şi numărul n al cazurilor egal posibile:

$$\Pr(E) = \frac{m}{n}$$

Pentru ilustrare, să presupunem că în urnă se află 52 de bile de culori diferite, dintre care una singură este albă. Întrucât $m = 1$ şi $n = 52$, probabilitatea de a extrage de la prima încercare o bilă albă este 1/52. Această fracție poate fi exprimată şi ca proporție, împărțind numărătorul la numitor: (1/52) = 0,0192. Vom spune că apariția bilei albe la o singură extragere se produce în proporție de 0,0192. În ştiințele omului, probabilitățile sunt exprimate în mod obişnuit ca proporții şi vom urma această convenție în continuare.

Este important de remarcat că, gândite astfel, probabilitățile au un înțeles precis: pe termen lung, cazurile favorabile se află într-o anumită relație proporțională cu numărul total de cazuri. În exemplul nostru, probabilitatea de 0,0192 ca bila albă să apară la o singură extragere înseamnă de fapt că din 10 000 de extrageri a câte unei bile din urna completă, proporția de extrageri a bilei albe va fi de 0,0192 sau, altfel spus, că din 10 000 de extrageri a câte unei bile din urna completă, bila albă va apărea de 192 de ori, celelalte 9 808 de extrageri producând bile de alte culori.

Acum, din cele de mai sus, ştim că pentru orice distribuţie particulară aproximativ normală, proporţiile prezentate în tabelul curbei normale standard ne dau frecvenţa relativă a cazurilor cu scoruri cuprinse între un anumit scor şi media aritmetică, precum şi că probabilitatea unui eveniment este frecvenţa relativă a cazurilor care realizează acel eveniment. Prin urmare, proporţiile din tabelul curbei normale standard pot fi interpretate ca probabilităţi şi pot fi folosite pentru a determina probabilitatea de selecţie a unui scor cuprins într-o plajă dată de scoruri ale unei distribuţii aproximativ normale.

Considerând din nou distribuţia variabilei *coeficient de inteligenţă* cu care am lucrat mai sus, să presupunem că ne interesează probabilitatea ca un subiect ales la întâmplare să aibă un scor IQ cuprins între 95 şi scorul mediu de 100 (aici, cazul favorabil este selectarea unui subiect al cărui scor se află în amplitudinea de scoruri specificată[23]). Scorul Z corespunzător scorului brut de 95 este –0,25 şi, conform tabelului curbei normale standard, proporţia din arie cuprinsă între scorul $Z = -0{,}25$ şi media aritmetică este de 0,0987. Această proporţie este probabilitatea căutată. Vom spune că probabilitatea ca un subiect ales la întâmplare să aibă un scor IQ cuprins între 95 şi 100 este de 0,0987 sau, rotunjit, de 0,1 sau de unu la zece.

De notat că pentru determinarea probabilităţilor de selectare a scorurilor se utilizează aceleaşi proceduri ilustrate mai sus pentru determinarea procentelor de cazuri, diferenţa fiind aceea că proporţiile din tabelul curbei normale standard sunt interpretate ca probabilităţi. De pildă, probabilitatea ca un subiect ales la întâmplare din eşantionul considerat să aibă un scor IQ peste 95 este de 0,5987 (0,5000 + 0,0987).

Să mai notăm că, întrucât în distribuţia normală standard cele mai multe scoruri sunt grupate în jurul mediei aritmetice, frecvenţa acestora scăzând pe măsură ce ne îndepărtăm de medie, dacă vom selecta la întâmplare un număr de scoruri dintr-o distribuţie aproximativ normală, vom selecta mai des scoruri apropiate de media aritmetică şi mai rar scoruri aflate mult sub sau peste medie.

---

[23] Determinarea probabilităţii căutate cu ajutorul formulei de calcul pentru probabilităţi ar conduce la construirea unei fracţii care să aibă drept numărător numărul de subiecţi ale căror scoruri se află în amplitudinea specificată şi drept numitor numărul total de subiecţi.

GLOSAR

Curbă normală: grafic al unei distribuții normale; acest grafic are formă de clopot cu ambele extremități extinse la infinit.

Curba normală standard: graficul corespunzător distribuției normale standard.

Distribuție normală: distribuție teoretică de scoruri unimodală, simetrică şi continuă.

Distribuția normală standard: distribuție normală particulară în care media aritmetică este egală cu 0 şi abaterea standard este egală cu unitatea.

Scoruri standard (scoruri *Z*): scoruri care folosesc abaterea standard ca unitate de măsură şi descriu poziția relativă a unui scor individual în raport cu întreaga mulțime de scoruri din care face parte.

Tabelul curbei normale standard: tabel în care sunt prezentate sub formă de proporții ariile dintre un scor *Z* şi media aritmetică a distribuției normale standard.

Variabila normală standard: variabila corespunzătoare distribuției normale standard.

5

EŞANTIONAREA ŞI DISTRIBUŢII DE EŞANTIONARE

După cum am arătat în capitolul 1, cercetătorii folosesc *statistici inferențiale* pentru a trage concluzii despre caracteristicile unei populații pe baza caracteristicilor corespunzătoare ale unui eşantion din acea populație. Folosirea adecvată a acestor tehnici statistice cere ca eşantioanele să fie selectate aleatoriu[24] din populațiile de referință. În cazul cel mai general, un eşantion este **aleatoriu** dacă fiecare caz din populația de referință are aceeaşi probabilitate de a fi selectat în eşantion cu a oricărui alt caz şi selectarea fiecărui caz este independentă de selectarea tuturor celorlalte cazuri. Dacă populația are, să zicem, 1 000 de membri, atunci fiecare membru trebuie să aibă o probabilitate de 1/1 000 de a fi selectat. Supoziția fundamentală a statisticilor inferențiale este aceea că investigarea unui eşantion aleatoriu dintr-o populație conduce la rezultate apropiate de cele care ar fi obținute dacă ar fi investigată întreaga populație şi, după cum vom vedea, noțiunea de *distribuție de eşantionare* furnizează o măsură a acestei apropieri. Eşantioanele nealeatorii pot fi foarte uşor alcătuite, dar nu permit formularea unor concluzii despre populațiile respective, ci doar despre eşantioane.

De notat că, în acest context, „aleatoriu“ este un termen tehnic, care nu are acelaşi înțeles cu termenul „întâmplător“, aşa cum este utilizat

---

[24] Cuvântul „aleatoriu“ provine din limba latină, în care substantivul „ālea“ înseamnă *joc cu zaruri* sau *şansă*, iar adjectivul „āleatōrius“ înseamnă *de joc*, cu referire la jocurile de noroc. După cum se ştie, aruncarea cu zarul este experimentul tipic luat în considerare în teoria probabilităților.

acesta în limbajul obişnuit. Un eşantion aleatoriu nu este alcătuit la întâmplare, ci printr-un proces bine determinat şi precis de selecţie. De pildă, intervievarea unor persoane pe care se întâmplă să le întâlnim într-un supermagazin nu constituie o eşantionare aleatorie.

Selecţia aleatorie este o condiţie necesară pentru obţinerea unor eşantioane care să ofere imagini cât mai precise ale populaţiilor de referinţă sau, altfel spus, a unor eşantioane reprezentative pentru populaţiile de referinţă, dar nici măcar cele mai sofisticate proceduri de selecţie aleatorie nu garantează 100% că eşantionul respectiv este o reprezentare *exactă* a populaţiei din care a fost alcătuit. Totuşi, probabilitatea ca eşantioanele aleatorii să fie reprezentative pentru populaţiile de referinţă este foarte mare, iar tehnicile statistice permit determinarea precisă a probabilităţilor erorilor de reprezentativitate.

Înainte de a prezenta rolul eşantionării în statisticile inferenţiale, vom prezenta pe scurt câteva dintre cele mai utilizate procedee de eşantionare aleatorie.

5.1. PROCEDEE DE EŞANTIONARE ALEATORIE

Procedeul fundamental de eşantionare aleatorie se numeşte **eşantionare aleatorie simplă**. În procesul de selecţie a unui eşantion aleatoriu simplu, fiecare caz din populaţia de referinţă are o probabilitate egală de a fi inclus în eşantion, iar selectarea fiecărui caz este independentă de selectarea tuturor celorlalte cazuri. Procesul de selecţie aleatorie simplă se poate baza pe diferite tipuri de operaţii. În mod tipic, se folosesc tabele cu numere selectate aleatoriu de un computer. Un exemplu de astfel de tabel este dat în Anexa B. Aceste tabele conţin numere alcătuite din cinci cifre, de la 0 la 9. Pentru a folosi un astfel de tabel, se atribuie fiecărui caz din populaţia de referinţă un număr unic de identificare, după care se alege la întâmplare un rând şi o coloană din tabel şi, pornind de la acel punct la dreapta sau la stânga, în sus sau în jos, se citesc numerele, selectând în eşantion cazurile ale căror numere de identificare corespund cu numerele citite în tabel. Selecţia se opreşte atunci când s-a ajuns la dimensiunea dorită a eşantionului. Pentru ilustrare, să presupunem că dorim să alcătuim un eşantion de dimensiune $n = 20$ dintr-o populaţie de dimensiune $N =$

600. Mai întâi, numerotăm membrii populației într-o ordine oarecare 001, 002, …, 600. Pentru a forma eşantionul, considerăm doar ultimele trei cifre ale numerelor din tabel şi, evident, ignorăm numerele mai mari de 600. Alegem la întâmplare un rând şi o coloană şi începem selecția pornind de la numărul respectiv şi mergând, de pildă, în jos pe coloana aleasă, până când obținem 20 de numere. Dacă un număr de identificare este selectat mai mult decât o singură dată, se ignoră repetarea şi se trece la următorul număr din secvență[25]. Eşantionul va fi alcătuit din acei membri ai populației ale căror numere de identificare au fost astfel selectate.

Statisticienii atrag atenția asupra necesității de a schimba des tabelul cu numere aleatorii, dacă cercetătorul foloseşte des procedeul menționat: „Natura umană este în aşa fel, încât fiecare dintre noi are tendința de a porni aproximativ din acelaşi loc şi de a parcurge repetat aproximativ aceeaşi cale. De aceea, folosirea repetată a aceluiaşi tabel poate să conducă la selectarea aceluiaşi şir de numere“[26].

Să vedem acum cum poate fi folosit tabelul cu numere aleatorii pentru a repartiza aleatoriu un număr de subiecți în grupuri. Să presupunem că avem 15 subiecți şi, în vederea unui experiment, dorim să alcătuim trei grupuri cu câte cinci subiecți în fiecare grup. Pentru aceasta, alegem la întâmplare un rând şi o coloană şi, urmând o anumită direcție, atribuim un număr fiecărui subiect, considerând doar ultimele două cifre ale numerelor din tabel. Apoi, considerăm subiecții în ordinea crescătoare a numerelor atribuite şi repartizăm primii cinci subiecți în grupul 1, următorii cinci subiecți în grupul 2 şi ultimii cinci subiecți în grupul 3. Tabelul următor prezintă o posibilă repartizare de felul menționat:

---

[25] De notat că ignorarea repetărilor implică *selecția fără înlocuire*, în care, după ce un membru din populația de referință a fost selectat, el este eliminat din populație. În selecția fără înlocuire, probabilitatea de selecție creşte pe măsura efectuării selecției, ca urmare a micşorării treptate a dimensiunii populației cu câte o unitate. De pildă, având o populație de 1 000 membri, probabilitățile de selecție fără înlocuire vor fi 1/1 000, 1/999, 1/998 ş.a.m.d. Ca atare, riguros vorbind, ignorarea repetărilor afectează caracterul aleatoriu al procesului de selecție. Totuşi, dacă dimensiunea eşantionului este relativ mică, probabilitatea de a selecta acelaşi membru din populația de referință de două ori şi astfel de a neglija repetările este foarte mică. Prin contrast, în *selecția cu înlocuire*, după ce un membru din populația de referință a fost selectat, el nu este eliminat din populație, astfel că probabilitatea de selecție rămâne constantă pe tot parcursul selecției.

[26] G. Keller, B. Warrack, 1991.

Subiecți	Numere atribuite	Repartizarea în grupuri
A	10	1
B	37	2
C	08	1
D	09	1
E	12	1
F	66	2
G	31	2
H	85	3
I	63	2
J	73	2
K	98	3
L	11	1
M	83	2
N	88	3
O	99	3

Evident, procedeul poate fi folosit pentru orice număr de grupuri într-un experiment.

Procedura de eşantionare aleatorie simplă devine incomodă atunci când dimensiunea populației de referință este foarte mare (10 000, de pildă). Într-un astfel de caz se poate folosi **eşantionarea sistematică**, numită şi *selecție mecanică*. Mai întâi, se stabileşte o fracție de selecție (fracție de eşantionare, pas de numărare): $K = N/n$, în care N este numărul total de cazuri din populația de referință, iar n este dimensiunea dorită a eşantionului. De pildă, dacă $N = 10\ 000$ şi $n = 300$, $K = 34$ (K se rotunjeşte întotdeauna până la un număr întreg). După ce s-a stabilit pasul de numărare, se listează la întâmplare membrii populației de referință şi se alege la întâmplare, eventual prin tragere la sorți, un caz din primele K cazuri care se include în eşantion şi apoi se alege fiecare al K-lea caz pentru a fi inclus în eşantion până se ajunge la dimensiunea dorită a eşantionului. În exemplul nostru, dacă din primele 34 de cazuri a fost ales la

întâmplare cazul cu numărul 5, atunci se vor include în eşantion următoarele cazuri: 5, 39, 73, 107 ş.a.m.d. până la $n = 300$.

De notat că în cazul eşantionării sistematice, selecţia nu mai este independentă, deoarece, cu excepţia primului caz, fiecare caz selectat depinde de numărul de ordine al cazului precedent. De aceea, acest procedeu este considerat ca fiind cvasialeatoriu. Caracterul aleatoriu este asigurat prin alcătuirea întâmplătoare a listelor din care sunt selectate cazurile.

Un al treilea procedeu de eşantionare, **eşantionarea stratificată**, conduce la creşterea cantităţii de informaţie despre populaţie. Pentru a alcătui un eşantion aleatoriu stratificat, se clasifică populaţia de referinţă după criterii relevante şi se alcătuiesc eşantioane aleatorii simple din fiecare clasă (strat). De pildă, pot fi folosite criterii precum sexul, vârsta sau ocupaţia.

Cititorul interesat de detalii privitoare la procedurile de eşantionare descrise sumar mai sus sau/şi de alte procedee de eşantionare poate consulta cărţi despre eşantionare sau manuale de metodologie a cercetării psihologice.

5.2. DISTRIBUŢIA DE EŞANTIONARE

Scopul principal al statisticilor inferenţiale este generalizarea unor caracteristici ale eşantionului la populaţia din care a fost alcătuit. Strategia generală a acestor tehnici statistice constă din trecerea de la distribuţia unui eşantion la distribuţia unei populaţii prin intermediul noţiunii de *distribuţie de eşantionare*. Ştim că informaţia necesară pentru caracterizarea adecvată a unei distribuţii include forma distribuţiei, unele mărimi ale tendinţei centrale şi unele mărimi ale dispersiei. Distribuţia unui eşantion este empirică (există în realitate) şi cunoscută, eşantionul fiind alcătuit de cercetător, în timp ce distribuţia populaţiei este empirică, dar este necunoscută. După cum vom vedea, distribuţia de eşantionare este nonempirică (teoretică — nu poate fi obţinută niciodată în realitate de către cercetător), iar pe baza legilor de probabilitate pot fi deduse forma, tendinţa centrală şi dispersia acestei distribuţii, astfel încât proprietăţile sale pot fi exact cunoscute. Să explicăm.

În capitolul anterior am folosit distribuția normală standard pentru a descrie distribuții de scoruri ale unor variabile aproximativ normale. În cele ce urmează vom considera mediile aritmetice, nu scorurile individuale, şi vom folosi distribuția normală standard (distribuția *Z*) pentru a descrie distribuția mediilor aritmetice ($\overline{X}$) pentru toate eşantioanele posibile de dimensiune dată (*n*), care pot fi obținute aleatoriu dintr-o populație. Cu alte cuvinte, vom considera că *media aritmetică* este ea însăşi o variabilă, ale cărei scoruri sunt mediile aritmetice ale tuturor eşantioanelor aleatorii posibile de dimensiune constantă *n* dintr-o populație.

Să presupunem că ne interesează media aritmetică a vârstelor dintr-o populație de dimensiune comparabilă cu populația României. Selectăm un eşantion aleatoriu de 100 de persoane din această populație şi înregistrăm vârstele pentru acest eşantion. Evident, ceea ce am obținut este distribuția vârstelor pentru eşantionul considerat, pentru care putem calcula media aritmetică. Acum, să presupunem că am selectat (cu înlocuire) *toate eşantioanele posibile* de dimensiune 100 din populația respectivă şi că am calculat media aritmetică pentru fiecare eşantion. Rezultatele pe care, în principiu, le-am obține în acest fel constituie distribuția mediilor aritmetice pentru toate eşantioanele posibile de dimensiune 100 din populația de referință. Această distribuție este numită *distribuția de eşantionare a mediilor aritmetice* ale tuturor eşantioanelor aleatorii de dimensiune 100 din populația de referință. În general, **distribuția de eşantionare a mediilor aritmetice** se defineşte ca distribuția mediilor aritmetice ale tuturor eşantioanelor aleatorii de dimensiune constantă *n* din populația de referință. În mod similar, se definesc distribuțiile de eşantionare pentru alte mărimi statistice (proporții, coeficienți de corelație etc.), pe care le vom considera în unele dintre capitolele care urmează. În continuare, ne vom concentra atenția asupra distribuției de eşantionare a mediilor aritmetice.

Ca şi distribuțiile de frecvențe considerate până acum, distribuția de eşantionare a mediilor aritmetice (şi cele ale celorlalte mărimi statistice) are (1) o formă, (2) o medie aritmetică şi (3) o abatere standard. Pentru media aritmetică şi abaterea standard a distribuției de eşantionare a mediilor aritmetice vom folosi, respectiv, simbolurile $\mu_{\overline{X}}$ şi $\sigma_{\overline{X}}$.

Cei trei parametri menţionaţi ai distribuţiei de eşantionare a mediilor aritmetice sunt daţi de următoarea teoremă, numită **teorema limitei centrale**:

Dacă se alcătuiesc toate eşantioanele posibile de dimensiune n dintr-o populaţie cu media aritmetică μ şi abaterea standard σ, atunci distribuţia de eşantionare a mediilor aritmetice ale acestor eşantioane are următoarele trei proprietăţi:

1. *Media sa aritmetică,* $\mu_{\overline{X}}$*, este egală cu media aritmetică a populaţiei, μ..*
2. *Abaterea sa standard,* $\sigma_{\overline{X}}$*, este egală cu* $\sigma/\sqrt{n}$ *.*
3. *Cu cât n este mai mare, cu atât forma sa aproximează mai bine normalitatea, indiferent de forma distribuţiei populaţiei.*

Demonstrarea acestei teoreme depăşeşte cadrul propus pentru lucrarea de faţă. Pentru concizia exprimării, în loc de „distribuţia de eşantionare a mediilor aritmetice“ vom scrie în continuare „distribuţia de eşantionare a $\overline{X}$“.

Teorema limitei centrale arată că, indiferent de forma distribuţiei unei variabile într-o populaţie, distribuţia de eşantionare a $\overline{X}$ va fi aproximativ normală pentru eşantioane suficient de mari. De pildă, dacă lucrăm cu o variabilă care prezintă o distribuţie asimetrică, precum venitul, putem să presupunem că distribuţia de eşantionare a $\overline{X}$ este aproximativ normală pentru eşantioane cu $n \geq 100$, având media aritmetică egală cu cea a populaţiei şi abaterea standard egală cu $\sigma/\sqrt{n}$. Astfel, teorema limitei centrale elimină constrângerea normalităţii pentru populaţii. Dacă distribuţia unei variabile este aproximativ normală, atunci distribuţia de eşantionare a $\overline{X}$ va fi aproximativ normală chiar şi pentru valori mai mici ale lui *n*. În fine, teoretic vorbind, dacă distribuţia unei variabile este riguros normală, atunci distribuţia de eşantionare a $\overline{X}$ va fi normală indiferent de dimensiunea eşantionului.

5.3. DETERMINAREA PROBABILITĂȚILOR PENTRU MEDII ARITMETICE

Teorema limitei centrale poate fi utilizată pentru a determina probabilitatea de a selecta la întâmplare o medie aritmetică a unui eşantion de dimensiune dată, cuprinsă într-o anumită plajă de medii aritmetice. Pentru ilustrare, să considerăm o populație cu media aritmetică a unei caracteristici aproximativ normale $\mu = 117$ şi $\sigma = 14$. Să presupunem că ne interesează probabilitatea ca un eşantion aleatoriu cu $n = 36$ selectat din această populație să aibă media aritmetică a caracteristicii respective cuprinsă între 115 şi 120. Întrucât variabila considerată este aproximativ normală, conform punctului 3 al teoremei limitei centrale distribuția de eşantionare a $\overline{X}$ aproximează normalitatea pentru $n = 36$. Conform punctelor 1 şi 2 ale acestei teoreme, avem:

$$\mu_{\overline{X}} = 117$$

$$\sigma_{\overline{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{14}{\sqrt{36}} = 2{,}34$$

În paragraful 4.4.2 am lucrat cu formula:

$$Z = \frac{X - \overline{X}}{s}$$

pentru a determina probabilitatea de selecție a unui scor cuprins într-o plajă dată de scoruri ale unei distribuții aproximativ normale. Aici, valorile 115 şi 120 sunt medii aritmetice. Scorurile Z corespunzătoare acestor valori se calculează cu ajutorul următoarei formule:

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu_{\overline{X}}}{\sigma_{\overline{X}}}$$

În exemplul nostru, avem:

$$Z_{115} = \frac{115 - 117}{2{,}34} = -0{,}85$$

$$Z_{120} = \frac{120 - 117}{2{,}34} = 1{,}28$$

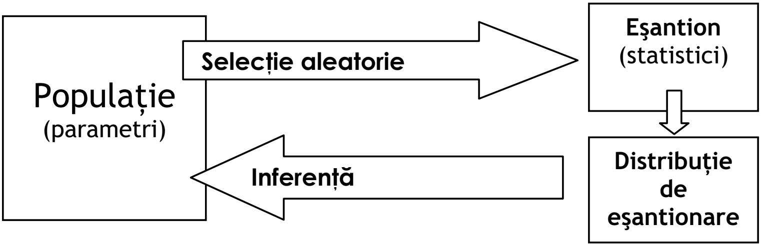
Din tabelul curbei normale aflăm că probabilitatea corespunzătoare scorului $Z = -0,85$ este 0,3023 şi că probabilitatea corespunzătoare scorului $Z = +1,28$ este 0,3997. Ca atare, probabilitatea ca un eşantion cu $n = 36$ să aibă media aritmetică între 115 şi 120 este de 0,7020 (0,3023 + 0,3997).

Să notăm şi aici că pentru determinarea probabilităților de selectare a mediilor aritmetice se utilizează aceleaşi proceduri ilustrate pentru determinarea procentelor de cazuri. De pildă, probabilitatea ca un eşantion aleatoriu cu $n = 36$ selectat din populația considerată mai sus să aibă media aritmetică peste 120 este de 0,1003 (0,5000 – 0,3997).

5.4. STRATEGIA INFERENȚIALĂ

În statisticile inferențiale, mărimile statistice pentru populații sunt numite **parametri** şi, prin contrast, mărimile statistice pentru eşantioane sunt numite pur şi simplu **statistici**. Figura 5.1 ilustrează strategia generală a statisticilor inferențiale[27], pe care o vom folosi în capitolele care urmează.

Figura 5.1 Strategia inferențială



Astfel, în general, în statisticile inferențiale avem o populație ai cărei parametri se doresc a fi determinați. Pentru aceasta, selectăm un eşantion aleatoriu din acea populație şi calculăm statisticile care reflectă parametrii corespunzători, după care, pe baza distribuțiilor de eşantionare ale acelor statistici şi a legilor de probabilitate inferăm asupra parametrilor populației.

---

[27] După Hinkle, Wiersma şi Jurs, 1988.

GLOSAR

Distribuția de eşantionare a mediilor aritmetice: distribuția mediilor aritmetice ale tuturor eşantioanelor aleatorii de dimensiune constantă *n* din populația de referință. În mod similar, se definesc distribuțiile de eşantionare pentru alte mărimi statistice (proporții, coeficienți de corelație etc.).

Eşantionare aleatorie simplă: metodă de selecție a unui eşantion în care fiecare caz din populația de referință are o probabilitate egală de a fi inclus în eşantion, iar selectarea fiecărui caz este independentă de selectarea tuturor celorlalte cazuri.

Eşantionare sistematică: metodă de selecție a unui eşantion în care primul caz dintr-o listă a populației de referință este selectat aleatoriu, după care este selectat fiecare al *k*-lea caz.

Eşantionare stratificată: metodă de selecție a unui eşantion în care populația de referință este clasificată după criterii relevante şi se alcătuiesc eşantioane aleatorii simple din fiecare clasă (strat).

Parametri: mărimi statistice pentru populații; prin contrast, mărimile statistice pentru eşantioane sunt numite **statistici**.

Teorema limitei centrale: teoremă care specifică media aritmetică, abaterea standard şi forma distribuției de eşantionare a mediilor aritmetice.

6

PROCEDURI DE ESTIMARE STATISTICĂ

Statisticile inferențiale se clasifică în două categorii principale: proceduri de estimare şi proceduri de testare a ipotezelor. În **procedurile de estimare**, care fac obiectul acestui capitol, pe baza unei statistici calculate pentru un eşantion se face o apreciere despre parametrul corespunzător al populației de referință. În **testarea ipotezelor**, care face obiectul capitolelor următoare, se verifică (se testează) o ipoteză despre populație prin raportare la rezultatele obținute pe un eşantion.

La rândul lor, procedurile de estimare sunt de două tipuri: puncte estimate şi intervale estimate. Un **punct estimat** este o singură valoare calculată pentru un eşantion şi folosită pentru a estima parametrul corespunzător al populației de referință. Un **interval estimat** este o amplitudine de valori în care este probabil să se afle un parametru al populației de interes. Luând drept exemplu sondajele electorale, a spune că 38% din electorat va vota pentru candidatul *X* înseamnă a raporta un punct estimat, în timp ce a spune că între 35% şi 42% din electorat va vota pentru candidatul *X* înseamnă a raporta un interval estimat. În ambele tipuri de proceduri, statisticile calculate pentru eşantioane servesc drept **estimatori**. De pildă, media aritmetică pentru un eşantion este un estimator al mediei aritmetice a populației de referință.

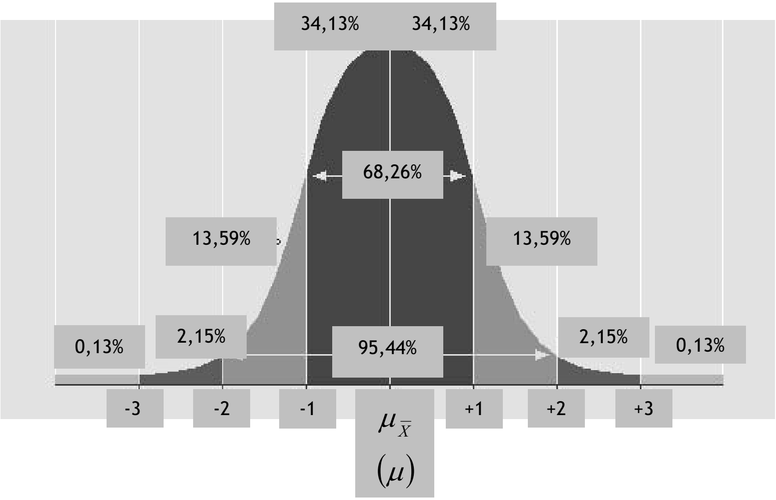
6.1. CARACTERISTICI ALE ESTIMATORILOR

Un estimator trebuie să satisfacă două condiții: să fie nedistorsionat şi relativ eficient. Se spune că un estimator este **nedistorsionat**, dacă media

aritmetică a distribuţiei sale de eşantionare este egală cu media aritmetică a populaţiei de referinţă. Conform teoremei limitei centrale, mediile aritmetice ale eşantioanelor satisfac această condiţie: media aritmetică a distribuţiei de eşantionare a mediilor aritmetice, $\mu_{\overline{X}}$, este egală cu media aritmetică a populaţiei, μ. Statisticienii au demonstrat că şi proporţiile eşantioanelor, p, sunt nedistorsionate, întrucât media aritmetică a distribuţiei de eşantionare a proporţiilor pentru eşantioane, μ_p, este egală cu proporţia populaţiei, P. Prin contrast, un estimator este **distorsionat** dacă media aritmetică a distribuţiei sale de eşantionare este diferită de media aritmetică a populaţiei. De pildă, abaterea standard a unui eşantion este un estimator distorsionat al abaterii standard a populaţiei: de regulă, dispersia unui eşantion este mai mică decât cea a populaţiei de referinţă, astfel că s tinde să subestimeze pe σ. După cum am menţionat în capitolul 3, această distorsiune poate fi corectată.

Un estimator nedistorsionat permite, între altele, determinarea probabilităţii ca o mărime statistică a unui eşantion să se afle la o anumită distanţă faţă de parametrul corespunzător pe care încercăm să-l estimăm. Pentru ilustrare, să presupunem că ne interesează venitul mediu al unei populaţii. Pentru aceasta, alcătuim un eşantion aleatoriu cu n = 500 şi calculăm media aritmetică pentru acest eşantion. Să presupunem că am găsit $\overline{X}$ = 5 000 000. După cum am arătat, variabila *venit* prezintă o distribuţie asimetrică. Cu toate acestea, conform teoremei limitei centrale, distribuţia de eşantionare a $\overline{X}$ pentru eşantioane mari ($n \geq 100$) aproximează normalitatea, având media aritmetică, $\mu_{\overline{X}}$, egală cu media aritmetică a populaţiei, μ. Ştim că toate curbele normale conţin aproximativ 68% din cazuri între ±1Z, 95% din cazuri între ±2Z şi 98% din cazuri între ±3Z faţă de medie. Aici, cazurile sunt medii aritmetice ale eşantioanelor, astfel că există o probabilitate mare (aproximativ 68 de şanse din 100) ca media aritmetică a eşantionului considerat, 5 000 000, să se afle între ±1Z, o probabilitate foarte mare (95 din 100) ca această medie să se afle între ±2Z şi o probabilitate extrem de mare (98 din 100) ca această medie să se afle între ±3Z faţă de media aritmetică a distribuţiei de eşantionare $\mu_{\overline{X}}$, care are aceeaşi valoare cu μ:

Figura 6.1 Procente din aria de sub curba normală



De remarcat că, în aproximativ 2% din cazuri, media aritmetică de 5 000 000 se află la mai mult de $\pm 3Z$ față de media aritmetică a distribuției de eşantionare. Practic, putem spune că media aritmetică de 5 000 000 nu se află în acea „minoritate“.

Cea de-a doua condiție pe care trebuie să o satisfacă un estimator, eficiența, este legată de dispersie. Un estimator este cu atât mai **eficient**, cu cât distribuția de eşantionare este mai grupată în jurul mediei sale aritmetice sau, altfel spus, cu cât este mai mică abaterea standard a distribuției de eşantionare. Să considerăm mediile aritmetice ale eşantioanelor. Din teorema limitei centrale ştim că abaterea standard a distribuției de eşantionare a mediilor aritmetice ale eşantioanelor, $\sigma_{\overline{X}}$, este egală cu $\sigma/\sqrt{n}$, deci $\sigma_{\overline{X}}$ este invers proporțională cu *n*: cu cât dimensiunea eşantionului este mai mare, cu atât este mai mică $\sigma_{\overline{X}}$. Ca atare, eficiența mediei aritmetice ca estimator poate fi îmbunătățită (=$\sigma_{\overline{X}}$ poate fi micşora-

tă) prin mărirea dimensiunii eşantionului. Pentru ilustrare, să considerăm următorul exemplu:

Eşantionul 1	Eşantionul 2
$\overline{X} = 5\,000\,000$	$\overline{X} = 5\,000\,000$
$n_1 = 100$	$n_2 = 1000$

Să presupunem că abaterea standard a populaţiei, σ, este de 275 000 (evident, valoarea lui σ este rareori cunoscută în realitate). În privinţa primului eşantion, abaterea standard a distribuţiei de eşantionare a mediilor aritmetice ale tuturor eşantioanelor cu n = 100 este $275000/\sqrt{100}$ = 27 500. În privinţa celui de-al doilea eşantion, abaterea standard a distribuţiei de eşantionare a mediilor aritmetice ale tuturor eşantioanelor cu n = 1 000 este considerabil mai mică: $275000/\sqrt{1000}$ = 8 697. Cea de-a doua distribuţie de eşantionare este mult mai grupată decât prima distribuţie[28].

Rezumând, întrucât $\sigma_{\overline{X}}$ este invers proporţională cu n, cu cât eşantionul este mai mare, cu atât distribuţia de eşantionare este mai grupată şi eficienţa estimatorului este mai mare[29].

6.2. ESTIMAREA MEDIEI ARITMETICE CÂND σ ESTE CUNOSCUT

Atunci când se estimează un punct, se alcătuieşte un eşantion aleatoriu, se calculează o medie aritmetică sau o proporţie şi se estimează că valoarea parametrului respectiv este egală cu valoarea calculată pentru

---

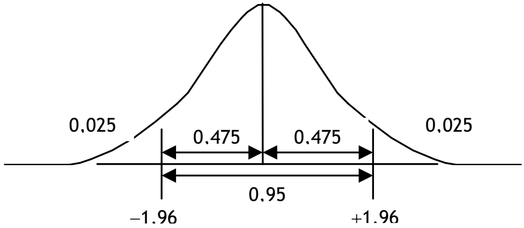
[28] Cea de-a doua distribuţie conţine aproximativ 68% din mediile aritmetice ale tuturor eşantioanelor posibile între ±8 697 faţă de $\mu_{\overline{X}}$, în timp ce prima distribuţie conţine ce 68% din mediile aritmetice într-un interval mult mai larg: ±27500.

[29] Aceste relaţii precizează ideea intuitivă că putem avea mai multă încredere în rezultatele obţinute pe eşantioane mari, decât în cele obţinute pe eşantioane mici, evident, cu condiţia ca şi unele şi altele să fie selectate aleatoriu.

eşantion. În acest tip de estimare se ţine cont faptul că eficienţa estimatorului este direct proporţională cu dimensiunea eşantionului, ceea ce înseamnă că probabilitatea ca estimatorul să fie aproximativ egal cu parametrul corespunzător este cu atât mai mare, cu cât dimensiunea eşantionului este mai mare.

Procedura de estimare a intervalelor este relativ mai complicată, dar este mai sigură, în sensul că, atunci când se estimează un interval, probabilitatea ca în acel interval să se afle parametrul de interes este mai mare şi poate fi stabilită cu precizie.

Fie o populaţie cu media aritmetică μ şi cu abaterea standard σ. Selectăm aleatoriu un eşantion de dimensiune n din această populaţie şi calculăm media aritmetică pentru eşantion, $\overline{X}$. Conform teoremei limitei centrale, distribuţia de eşantionare a mediilor aritmetice ale tuturor eşantioanelor posibile de dimensiune n din populaţia de referinţă este aproximativ normală, cu media aritmetică egală cu cea a populaţiei de referinţă şi cu abaterea standard egală cu $\sigma/\sqrt{n}$. Pe baza caracteristicilor distribuţiei de eşantionare şi a tabelului distribuţiei normale standard putem formula enunţuri de probabilitate despre mediile aritmetice ale eşantioanelor. De pildă, din tabel aflăm că proporţia de cazuri (medii aritmetice ale eşantioanelor) cuprinse între $Z = -1{,}96$ şi media aritmetică este de 0,475. Întrucât curba este simetrică, proporţia de cazuri cuprinse între $Z = +1{,}96$ şi media aritmetică este tot de 0,475. Astfel, proporţia de cazuri cuprinse între ±1,96 abateri standard faţă de medie este de 0,95, iar proporţia de cazuri aflate sub −1,96 şi peste +1,96 abateri standard faţă de medie este de 0,05 (0,025 + 0,025):



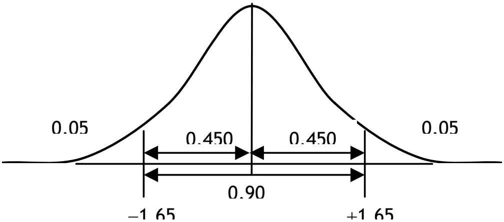
Acelaşi lucru ca mai sus poate fi exprimat spunând că 95% din mediile aritmetice ale eşantioanelor se află în intervalul dintre $\mu - 1{,}96(\sigma/\sqrt{n})$ şi $\mu + 1{,}96(\sigma/\sqrt{n})$ sau, pe scurt, în intervalul $\mu \pm 1{,}96(\sigma/\sqrt{n})$. Structura acestui tip de enunț de probabilitate poate fi folosită pentru a estima valoarea parametrului μ, prin construirea unui interval centrat pe valoarea cunoscută pentru eşantion, $\overline{X}$. Rezultatul este un **interval de încredere estimat** – o amplitudine de valori în care este probabil (nu sigur) să se afle μ. Astfel, putem estima că există o probabilitate de 0,95 (sau 95%) ca media aritmetică a populației să se afle în intervalul $\overline{X} \pm 1{,}96(\sigma/\sqrt{n})$, ceea ce înseamnă că probabilitatea ca media aritmetică a populației să nu se afle în acest interval este de 0,05 (sau 5%).

Probabilitatea ca media aritmetică a populației să nu se afle în intervalul estimat sau, altfel spus, probabilitatea de eroare a estimării se numeşte **nivel de semnificație** sau **nivel alfa** (α), iar probabilitatea ca intervalul estimat să conțină media aritmetică a populației se numeşte **nivel de încredere**. După cum reiese şi din cele de mai sus, nivelul de încredere este complementarul nivelului alfa, fiind egal cu $1 - \alpha$ sau, în procente, cu $(1 - \alpha)\times100$. A stabili, de pildă, că $\alpha = 0{,}05$ înseamnă acelaşi lucru cu a spune că nivelul de încredere este de 95%. Întrucât probabilitatea de eroare este împărțită în mod egal în extremitatea inferioară şi cea superioară a distribuției de eşantionare, stabilindu-se astfel limita inferioară şi limita inferioară de încredere, vom nota scorul Z corespunzător nivelului α ales cu $Z_{\alpha/2}$. Astfel, în cazul în care σ este cunoscut, formula de construire a unui interval de încredere estimat (*IE*) bazat pe media aritmetică a unui eşantion este următoarea:

Formula 6.1. $$IE = \overline{X} \pm Z_{\alpha/2}(\sigma/\sqrt{n})$$

Ca exemplu, să presupunem că dorim să estimăm media aritmetică zilnică a orelor de vizionare a programelor TV de către femeile casnice. Pentru aceasta, alcătuim un eşantion aleatoriu de 200 de femei casnice ($n = 200$) şi aflăm că acestea petrec în medie 6 ore pe zi vizionând pro-

grame TV ($\overline{X} = 6$). Prin testări extensive ştim că abaterea standard a populaţiei pentru vizionarea programelor TV este de aproximativ 0,7 ($\sigma = 0{,}7$). În această cercetare suntem dispuşi să asumăm o şansă de a greşi de 10%, stabilind $\alpha = 0{,}10$. Pentru a determina limitele de încredere inferioară şi superioară, trebuie să scădem 0,05 (i.e. $\alpha/2$) din 0,5 (proporţia de cazuri aflate de o parte şi de alta a mediei aritmetice a distribuţiei de eşantionare). Rezultatul scăderii este 0,450, ceea ce reprezintă proporţia de cazuri dintre o limită de încredere şi medie:



Astfel, pentru $\alpha = 0{,}10$ trebuie să căutăm proporţia 0,4500 în tabelul distribuţiei normale standard. Găsim însă o proporţie de 0,4495, corespunzătoare scorului $Z_{\alpha/2} = \pm 1{,}64$ şi o proporţie de 0,4505, corespunzătoare scorului $Z_{\alpha/2} = \pm 1{,}65$. Scorul $Z_{\alpha/2}$ pe care îl căutăm se află undeva între aceste două scoruri. În aceste condiţii, se ia cel mai mare dintre cele două scoruri: ±1,65. În acest fel, intervalul de încredere va fi cel mai mare posibil în circumstanţele date. Prin urmare, vom avea:

$$IE = \overline{X} \pm Z_{\alpha/2}(\sigma/\sqrt{n}) = 6 \pm 1{,}65(0{,}7/\sqrt{200}) = 6 \pm 1{,}65(0{,}7/14{,}14) =$$

$$= 6 \pm 1{,}65 \cdot 0{,}0495 = 6 \pm 0{,}08$$

Pe baza mediei aritmetice a eşantionului, estimăm că femeile casnice petrec în medie între 5,92 (6 – 0,08) şi 6,08 (6 + 0,08) ore pe zi vizionând programe TV. O altă modalitate de a enunţa acest interval este $5{,}92 < \mu < 6{,}08$. Această

estimare are o şansă de 10% de a fi greşită, adică de a nu conţine media aritmetică a populaţiei.

În principiu, cercetătorul poate folosi orice valoare pentru nivelul de încredere. Totuşi, nivelurile de încredere folosite în mod obişnuit sunt 90%, 95% şi 99%. În cazul nivelului de încredere de 99% ne confruntăm cu aceeaşi problemă ca în ultimul exemplu de mai sus. În acest caz, $\alpha = 0{,}01$ şi scăzând 0,005 ($\alpha/2$) din 0,5 obţinem 0,495. În tabel nu apare proporţia 0,4950, dar apar proporţiile 0,4949 ($Z_{\alpha/2} = \pm 2{,}57$) şi 0,4951 ($Z_{\alpha/2} = \pm 2{,}57$). Ca mai sus, se ia cel mai mare dintre cele două scoruri: ±2,58. Tabelul următor rezumă toate datele de care avem nevoie:

Tabelul 6.1. Niveluri de încredere şi scoruri $Z_{\alpha/2}$

Nivelul de încredere $(1 - \alpha) \times 100$	α	$\alpha/2$	$Z_{\alpha/2}$
90%	0,10	0,050	±1,65
95%	0,05	0,025	±1,96
99%	0,01	0,005	±2,58

6.3. ESTIMAREA MEDIEI ARITMETICE CÂND σ ESTE NECUNOSCUT. DISTRIBUŢIA *t*-STUDENT

În aproape toate situaţiile reale de cercetare, valoarea abaterii standard a populaţiei este necunoscută. Se disting aici două cazuri: cazul în care dimensiunea eşantionului este relativ mare, ceea ce înseamnă eşantioane cu $n > 30$, şi cazul $n \leq 30$.

În cazul eşantioanelor cu $n > 30$, σ se poate estima prin s (abaterea standard a eşantionului). Întrucât, după cum am văzut, s este un estimator distorsionat pentru σ, formula de construire a intervalului de încredere estimat este uşor modificată faţă de formula 6.1, pentru a se corecta distorsiunea. Astfel, formula modificată pentru cazurile (reale) în care σ este necunoscut şi $n > 30$ este următoarea:

Formula 6.2. $IE = \overline{X} \pm Z_{\alpha/2}(s/\sqrt{n-1})$

Înlocuirea lui $\sqrt{n}$ cu $\sqrt{n-1}$ reprezintă corecția cerută de faptul că *s* este un estimator distorsionat.

Pentru ilustrare, să presupunem că venitul mediu al unui eşantion aleatoriu cu $n = 500$ este de 5 000 000 de lei ($\overline{X} = 5\,000\,000$) cu $s = 125\,000$. Care este intervalul de încredere estimat pentru media aritmetică a populației respective, la un nivel de încredere de 95% ($\alpha = 0{,}05$)?

$$IE = \overline{X} \pm Z_{\alpha/2}(s/\sqrt{n-1}) = 5000000 \pm 1{,}96(125000/\sqrt{500-1}) =$$
$$= 5000000 \pm 1{,}96(125000/22{,}34) = 5000000 \pm 1{,}96 \cdot 5595{,}34 =$$
$$= 5000000 \pm 10967$$

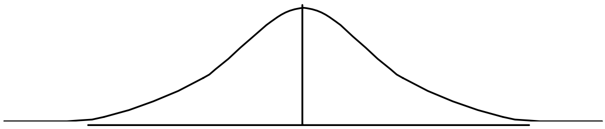
Pe baza mediei aritmetice a eşantionului, estimăm că media aritmetică a veniturilor populației este cuprinsă între 4 989 033 lei (5 000 000 – 10 967) şi 5 010 967 lei (5 000 000 – 10 967) şi există doar 5% şanse ca acest interval să nu conțină media aritmetică a populației.

Atunci când eşantioanele sunt mici ($n \leq 30$) şi valoarea lui σ este necunoscută, distribuția normală standard nu poate fi folosită pentru a descrie distribuția de eşantionare a mediilor aritmetice. Pentru a construi intervale estimate semnificative în cazul $n \leq 30$ se foloseşte o altă distribuție teoretică: **distribuția *t*–Student**[30]. Ca şi în cazul distribuției normale, graficul distribuției *t*–Student, numit şi **curba *t***, este simetric şi are formă de clopot cu ambele extremități extinse la infinit. Spre deosebire de graficul distribuției normale, forma exactă a graficului distribuției *t* depinde de dimensiunea eşantionului. Pentru eşantioane mici, graficul distribuției *t* este mult mai aplatizat decât cel al distribuției normale (comparați figura următoare cu oricare dintre graficele de mai sus).

---

[30] Această distribuție este datorată lui William S. Gosset, un chimist şi statistician care lucra la fabrica de bere Guiness la începutul secolului al XX-lea. Gosset a descoperit că pentru eşantioanele mici, distribuțiile de eşantionare diferă de distribuția normală şi depind de dimensiunea eşantionului considerat. Gosset şi-a publicat rezultatele în 1908 sub pseudonimul *Student*.

Figura 6.2. Un exemplu de curbă *t*



$t = 0$

Pe măsură ce dimensiunea eşantionului creşte, distribuţia *t* seamănă din ce în ce mai mult cu distribuţia normală, identificându-se cu aceasta pentru eşantioane practic foarte mari (şi teoretic infinite). Astfel, întrucât există o distribuţie *t* specifică pentru fiecare eşantion de dimensiune dată, distribuţia *t* este, de fapt, *o familie de distribuţii*.

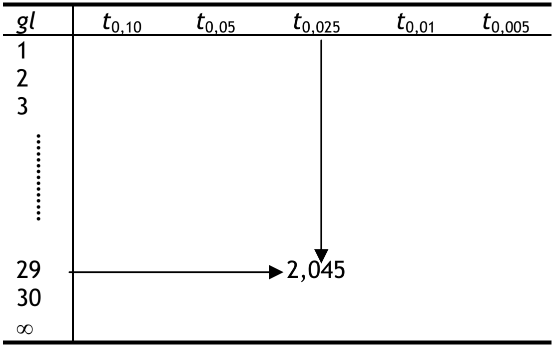
Distribuţia *t* particulară cerută pentru rezolvarea unei anumite probleme depinde de un concept matematic numit **grade de libertate**. Acest concept se referă la numărul de valori libere să varieze într-o distribuţie. De pildă, dacă ştim că o distribuţie de cinci scoruri are media aritmetică egală cu 3 şi că patru dintre aceste scoruri sunt 1, 2, 3 şi 4, atunci valoarea celui de-al cincilea scor este fixată: 5. În general, pentru media aritmetică a unui eşantion de dimensiune n, o distribuţie are $n - 1$ grade de libertate. Fiecare distribuţie *t* este asociată cu un număr unic de grade de libertate. Mai precis, dacă se selectează toate eşantioanele posibile de dimensiune n dintr-o populaţie normală, atunci distribuţia de eşantionare a cantităţii

$$t = \frac{\overline{X} - \mu}{s/\sqrt{n-1}}$$

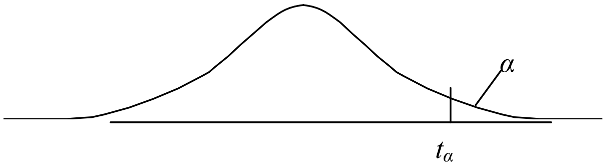
este distribuţia *t*–Student cu $n - 1$ grade de libertate.

Distribuţia *t* va fi utilizată îndeosebi în testarea ipotezelor. Deocamdată vom descrie **tabelul valorilor critice ale distribuţiei *t***, prezentat în Anexa C, şi vom ilustra utilizarea acestui tabel pentru estimarea intervalelor. Schema generală a acestui tabel este prezentată în figura 6.3.

Figura 6.3. Schema tabelului valorilor critice ale distribuției *t*



Tabelul valorilor critice ale distribuției t specifică valorile pentru t_α, ceea ce înseamnă valorile lui t pentru care aria aflată la dreapta sub curba t este egală cu α:



Nivelurile α sunt dispuse pe primul rând al tabelului. Valorile t_α sunt date pentru grade de libertate (*gl*), dispuse pe prima coloană din stânga, de la 1 la 30 şi apoi 40, 60, 120 şi ∞. De notat că, pe măsură ce numărul de grade de libertate creşte, diferența dintre distribuția t şi distribuția normală descreşte, precum şi că, pentru o infinitate de grade de libertate, distribuția t este identică cu distribuția normală. Pentru estimarea intervalelor, ca şi pentru alte scopuri, avem nevoie de $t_{\alpha/2}$. Această valoare se localizează înmulțind cu 2 valoarea α aflată pe primul rând. De pildă, pentru n = 30 şi α = 0,05, numărul de grade de libertate este 29; la in-

tersecția coloanei de sub t_α = 0,025 şi liniei corespunzătoare pentru gl = 29 găsim valoarea 2,045. Astfel, în acest caz, vom spune că valoarea lui $t_{\alpha/2}$ este ±2,045.

Formula pentru cazurile în care σ este necunoscut şi $n \leq 30$ este următoarea:

Formula 6.3. $$IE = \overline{X} \pm t_{\alpha/2}(s/\sqrt{n})$$

Pentru ilustrare, să presupunem că un eşantion aleatoriu de 20 de adolescenți cu dificultăți de învățare au obținut următoarele rezultate la un test de cunoştințe la care scorul maxim ce poate fi obținut este de 40:

Tabelul 6.2. Scoruri obținute la un test de cunoştințe de către 20 de adolescenți cu dificultăți de învățare

18	20	12	30
31	32	25	29
26	28	23	20
24	27	20	19
22	33	28	22

Presupunând că variabila măsurată este normal distribuită în populația de adolescenți cu dificultăți de învățare, care este intervalul de încredere estimat pentru media aritmetică a acestei populații, la un nivel de încredere de 99%? Calculăm mai întâi media aritmetică a scorurilor din eşantion:

$$\overline{X} = \frac{\sum X_i}{n} = \frac{489}{20} = 24,45$$

Abaterea standard la nivelul eşantionului este:

$$s = \sqrt{\frac{\sum X_i^2 - n\overline{X}^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{12515 - 20 \cdot 597,8}{19}} = \sqrt{29,4} = 5,42$$

Pentru $n = 20$, numărul de grade de libertate este 19; având $\alpha = 0{,}01$, la intersecția coloanei de sub $t_\alpha = 0{,}005$ şi liniei corespunzătoare pentru $gl = 19$ găsim valoarea 2,861. Astfel, valoarea lui $t_{\alpha/2}$ este ±2,861. Aplicând formula 6.3, obținem:

$$IE = \overline{X} \pm t_{\alpha/2}(s/\sqrt{n}) = 24{,}45 \pm 2{,}861(5{,}42/\sqrt{20}) = 24{,}45 \pm 3{,}46$$

Astfel, estimăm că media aritmetică pe care o căutăm este cuprinsă între 21,03 şi 27,91 şi există doar 1% şanse ca acest interval să nu conțină media aritmetică a populației.

De reținut că formula 6.3 poate fi aplicată doar dacă variabila de interes este normal distribuită.

6.4. ESTIMAREA PROPORȚIILOR

Pe baza teoremei limitei centrale se demonstrează că proporțiile pentru eşantioane (p) au distribuții de eşantionare aproximativ normale, cu media aritmetică (μ_p) egală cu proporția pentru populație (P) şi abaterea standard (σ_p) egală cu $\sqrt{P(1-P)/n}$. Teoretic, formula pentru construirea unui interval estimat bazat pe proporții ale eşantioanelor este următoarea:

Formula 6.4.

$$IE = p \pm Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{P(1-P)}{n}}$$

În această formulă, valorile pentru p şi n provin de la eşantion, iar valoarea lui $Z_{\alpha/2}$ se determină la fel ca mai sus. Problema cu această formulă este că valoarea proporției pentru populație, P, nu este cunoscută. Pentru a rezolva această problemă, se poate proceda în două moduri.

Un prim mod de a rezolva problema constă în a stabili că $P = 0{,}5$. În această situație, $1 - P = 0{,}5$ iar $P(1 - P) = 0{,}5 \cdot 0{,}5 = 0{,}25$. Este important de remarcat că 0,25 este valoarea maximă pe care o poate lua numărătorul fracției de sub radical, $P(1 - P)$. Stabilind pentru P orice altă va-

loare diferită de 0,5, valoarea expresiei $P(1 - P)$ va fi mai mică decât valoarea pentru $P = 0,5$. De pildă, dacă $P = 0,4$, atunci $1 - P = 0,6$ şi $P(1 - P) = 0,4 \cdot 0,6 = 0,24$. Întrucât $P(1 - P)$ are valoarea maximă când $P = 0,5$, ne asigurăm că intervalul obţinut va fi cel mai mare posibil pentru p, $Z_{\alpha/2}$ şi n date. Practic, adoptând această soluţie, lucrăm cu formula următoare:

Formula 6.5. $$IE = p \pm Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{0,25}{n}}$$

A doua soluţie a problemei menţionate constă din a estima valoarea lui P prin p, lucrând cu formula următoare:

Formula 6.6. $$IE = p \pm Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$$

Oricum, formulele de mai sus pot fi folosite doar dacă dimensiunea eşantionului considerat este destul de mare, astfel încât $np \geq 5$ şi $n(1-p) \geq 5$.

Să presupunem, de pildă, că ne dorim să estimăm proporţia de studenţi de la universitatea X care au lipsit cel puţin o zi pe motiv de boală într-un anumit semestru şi că dintr-un eşantion aleatoriu de 200 de studenţi, găsim 30 în această situaţie. Astfel, proporţia eşantionului pe care ne bazăm estimarea este $p = 30/200 = 0,15$. La un nivel de încredere de 95%, intervalul estimat cu ajutorul formulei 6.5 este următorul:

$$IE = p \pm Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{0,25}{n}} = 0,15 \pm 1,96\sqrt{\frac{0,25}{200}} = 0,15 \pm 0,07$$

Pe baza proporţiei de 0,30 a eşantionului, estimăm că proporţia căutată este cuprinsă între 0,08 şi 0,22. Estimarea poate fi exprimată şi în termeni de procente, spunând că între 8% şi 22% dintre studenţii universităţii X au lipsit cel puţin o zi pe motiv de boală în semestrul considerat.

Să aplicăm acum formula 6.6 la aceleaşi date, păstrând nivelul de încredere de 95%:

$$IE = p \pm Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} = 0{,}15 \pm 1{,}96\sqrt{\frac{0{,}15(1-0{,}15)}{200}} =$$

$$= 0{,}15 \pm 1{,}96\sqrt{\frac{0{,}15 \cdot 0{,}85}{200}} = 0{,}15 \pm 1{,}96\sqrt{\frac{0{,}13}{200}} = 0{,}15 \pm 0{,}05$$

În acest caz, estimăm că proporţia căutată este cuprinsă între 0,10 şi 0,20 sau, altfel spus, că între 10% şi 20% dintre studenţii universităţii *X* au lipsit cel puţin o zi pe motiv de boală în semestrul considerat.

De notat că intervalul estimat cu ajutorul formulei 6.5 este mai larg decât cel estimat cu ajutorul formulei 6.6, astfel că prima estimare este cea mai conservatoare soluţie posibilă, căci este mult mai probabil ca intervalele mai largi să conţină parametrul estimat. Prin urmare, din punct de vedere statistic, prima estimare este preferabilă celei de-a doua estimări.

6.5. DIMENSIUNI ALE EŞANTIOANELOR ŞI NIVELURI DE PRECIZIE

Formulele 6.1 şi 6.5 pot fi manipulate algebric pentru a determina dimensiunea unui eşantion la orice nivel de precizie dorit sau, altfel spus, pentru orice limită de eroare stabilită.

6.5.1. CONTROLUL MĂRIMII INTERVALULUI ESTIMAT

Mărimea unui interval de încredere estimat pentru medii aritmetice sau proporţii poate fi controlat prin intermediul a doi termeni ai ecuaţiei respective: nivelul de încredere, care determină scorul $Z_{\alpha/2}$ sau $t_{\alpha/2}$ corespunzător, şi dimensiunea eşantionului.

Relaţia dintre nivelul de încredere şi mărimea intervalului este de proporţionalitate directă: cu cât nivelul de încredere creşte, cu atât intervalul este mai mare. Intuitiv, este mult mai probabil ca intervalele mai largi să conţină valoarea pentru populaţie, prin urmare putem avea mai multă încredere în astfel de intervale. Pentru a ilustra această relaţie, să conside-

răm din nou exemplul privind estimarea venitului mediu al unei populații: n = 500, $\overline{X} = 5\,000\,000$, s = 125 000. La un nivel de încredere de 95% am găsit intervalul 5 000 000 ± 10 967 (i.e. acest interval se extinde la 10 967 lei în jurul mediei aritmetice a eşantionului). Acum, dacă luăm un nivel de încredere de 99%, scorul $Z_{\alpha/2}$ corespunzător creşte la ±2,58, iar intervalul se măreşte:

$$IE = 5000000 \pm 2{,}58 \cdot 5595{,}34 = 5000000 \pm 14436$$

(intervalul estimat la un nivel de încredere de 99% se extinde la 14 436 lei în jurul mediei). Exact aceeaşi relație se aplică şi la proporții.

Relația dintre dimensiunea eşantionului şi mărimea intervalului este de proporționalitate inversă: cu cât dimensiunea eşantionului este mai mare, cu atât intervalul este mai îngust. Intuitiv, eşantioanele mai mari permit estimări mai precise. Pentru ilustrare, să considerăm din nou exemplul privind estimarea venitului mediu, modificând doar dimensiunea eşantionului: n = 1000 (95%).

$$IE = 5000000 \pm 1{,}96 (125000 / \sqrt{1000 - 1}) =$$

$$= 5000000 \pm 1{,}96 \cdot 3955{,}7 = 5000000 \pm 7753$$

Pentru n = 500, la un nivel de încredere de 95%, intervalul estimat se extinde la 10 967 lei în jurul mediei; pentru n = 1 000, toate celelalte rămânând aceleaşi, intervalul estimat se extinde doar la 7 753 lei în jurul mediei. Exact aceeaşi relație se aplică şi la proporții.

De notat că îngustarea intervalului (= creşterea preciziei) nu depinde în mod liniar de dimensiunea eşantionului. În exemplul nostru am dublat dimensiunea eşantionului, dar cel de-al doilea interval nu este de două ori mai îngust decât primul, ci de aproximativ 1,41 de ori mai îngust. Aceasta înseamnă că n trebuie să crească de trei sau patru ori pentru a obține o dublare a preciziei. Întrucât costul unei cercetări este direct proporțional cu dimensiunea eşantionului, un eşantion de, să zicem, 10 000 de persoane costă aproximativ de două ori mai mult decât unul de 5 000 de persoane, dar estimarea bazată pe eşantionul mai mare nu va fi de două ori mai precisă decât cea bazată pe eşantionul mai mic.

6.5.2. DETERMINAREA DIMENSIUNII EŞANTIONULUI PENTRU ESTIMAREA MEDIILOR ARITMETICE

Să considerăm formula 6.1.:

$$IE = \overline{X} \pm Z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

În această formulă, membrul $Z_{\alpha/2}(\sigma/\sqrt{n})$ reprezintă, în fapt, **limita de eroare** sau **nivelul de precizie** a estimării: $-Z_{\alpha/2}(\sigma/\sqrt{n})$ este limita inferioară, iar $+Z_{\alpha/2}(\sigma/\sqrt{n})$ este limita superioară. Notând limita de eroare cu *L*, putem scrie următoarea ecuaţie:

$$L = Z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Ridicând la pătrat ambii membri ai ecuaţiei, egalitatea se păstrează:

$$L^2 = Z^2_{\alpha/2} \frac{\sigma^2}{n}$$

Din această egalitate îl putem obţine pe *n*:

Formula 6.7. $$n = \frac{Z^2_{\alpha/2}\sigma^2}{L^2}$$

Pentru a folosi această formulă trebuie să cunoaştem valoarea lui σ, or, după cum am mai menţionat, în aproape toate cazurile această valoare nu este cunoscută. Totuşi, valoarea lui σ poate fi aproximată, dacă cunoaştem amplitudinea variabilei măsurate, *A*. Astfel, o aproximare conservatoare a lui σ este $\sigma \cong A/4$.

Să ilustrăm. Un psiholog industrial doreşte să estimeze durata medie în care un muncitor de la o firmă de produse electronice execută un anumit reglaj. Observând un număr de muncitori care execută reglajul respectiv, psihologul constată că durata cea mai mică este de 10 minute, iar cea mai mare de 22 de minute. Cât de mare trebuie să fie eşantionul se-

lectat, dacă psihologul doreşte să estimeze durata medie de execuție a acelui reglaj cu o precizie de 20 de secunde, la un nivel de încredere de 95%? În această problemă, L = 20 şi amplitudinea variabilei măsurate este $A = 22 - 10 = 12$ minute, astfel că:

$$\sigma \cong A/4 = 12/4 = 3 \text{ minute} = 180 \text{ secunde}$$

Acum îl putem obține pe n:

$$n = \frac{Z_{\alpha/2}^2 \sigma^2}{L^2} \cong \frac{(1,96)^2 \cdot 180^2}{20^2} = 311,12 \cong 300$$

Prin urmare, psihologul trebuie să selecteze un eşantion aleatoriu de aproximativ 300 de muncitori pentru a estima durata medie de executare a reglajului respectiv cu o precizie de 20 de secunde, la un nivel de încredere de 95%.

Să presupunem acum că se doreşte dublarea preciziei de la 20 de secunde la 10 secunde, la acelaşi nivel de încredere. În acest caz avem:

$$n = \frac{Z_{\alpha/2}^2 \sigma^2}{L^2} \cong \frac{(1,96)^2 \cdot 180^2}{10^2} = 1244,48 \cong 1244$$

Se observă că dimensiunea eşantionului creşte mai repede decât precizia: pentru a dubla precizia de la 20 de secunde la 10 secunde, dimensiunea eşantionului trebuie să crească de aproximativ patru ori. Această relație este importantă pentru planificarea costurilor unei cercetări. Eşantioanele impresionant de mari pot constitui o irosire de resurse fără un câştig semnificativ în privința preciziei, în raport cu eşantioanele mai mici şi deci mai ieftine.

6.5.3. DETERMINAREA DIMENSIUNII EŞANTIONULUI PENTRU ESTIMAREA PROPORȚIILOR

Am văzut că, practic, în construirea unui interval estimat pentru proporții lucrăm cu formula

$$IE = p \pm Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{0,25}{n}}$$

Aici, limita de eroare a estimării este $Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{0,25}{n}}$. Notând tot cu L limita de eroare a estimării, avem ecuația:

$$L = Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{0,25}{n}}$$

Ridicând la pătrat ambii membri, avem:

$$L^2 = Z^2_{\sigma/2}\,\frac{0,25}{n}$$

Din această egalitate îl obținem pe n:

Formula 6.8 $$n = \frac{Z^2_{\sigma/2}\,0,25}{L^2}$$

Să presupunem că un institut de sondare a opiniei publice dorește să estimeze rezultatul unor alegeri prezidențiale înăuntrul unei marje de eroare de ±3%. Cât de mare trebuie să fie eșantionul cerut pentru a sigura acest nivel de precizie la un nivel de încredere de 95%? Exprimând limita de eroare sub formă de proporție, obținem:

$$n = \frac{(1,96)^2\,0,25}{(0,03)^2} = 1067,11 \cong 1000$$

Prin urmare, pentru a obține o precizie (o limită de eroare a estimării) de ±3%, este nevoie de un eșantion de aproximativ 1 000 de persoane.

Şi aici se poate constata ușor că dimensiunea eșantionului crește mai repede decât precizia. Tabelul următor prezintă relațiile dintre precizie și dimensiunea eșantionului pentru proporții ale eșantioanelor:

Tabelul 6.3. Precizia şi dimensiunea eşantionului
(α = 0,05, P = 0,5)

Precizia (mărimea intervalului)	Dimensiunea aproximativă a eşantionului
±10%	100
±7%	200
±5%	400
±3%	1000
±2%	2400
±1%	9600

Se poate observa, de pildă, că pentru a dubla precizia de la 10% la 5%, dimensiunea eşantionului trebuie să crească de patru ori.

GLOSAR

Curba *t*: grafic al unei distribuții *t*; ca şi curba normală, curba *t* este simetrică şi are formă de clopot cu ambele extremități extinse la infinit; spre deosebire de curba normală, forma exactă a curbei *t* depinde de dimensiunea eşantionului.

Distorsiune: criteriu folosit pentru selectarea unei mărimi statistice ca estimator; o mărime statistică este nedistorsionată, dacă media aritmetică a distribuției sale de eşantionare este egală cu media aritmetică a populației de referință.

Distribuția *t*: distribuție teoretică ce descrie distribuția de eşantionare a mediilor aritmetice în cazul în care eşantioanele sunt mici ($n \leq 30$) şi valoarea lui σ este necunoscută.

Eficiență: criteriu folosit pentru selectarea unei mărimi statistice ca estimator; o mărime statistică este cu atât mai eficientă, cu cât distribuția de eşantionare este mai grupată în jurul mediei sale aritmetice sau, altfel spus, cu cât este mai mică abaterea standard a distribuției de eşantionare.

Grade de libertate: concept care se referă la numărul de valori libere să varieze într-o distribuție.

Interval de încredere estimat: amplitudine de valori în care este probabil să se afle un parametru al populației de interes.

Nivel alfa (α): Probabilitatea ca un parametru să nu se afle în intervalul estimat sau, altfel spus, probabilitatea de eroare a estimării.

Nivel de încredere: probabilitatea ca intervalul estimat să conțină parametrul de interes.

Proceduri de estimare: tehnici statistice în care, pe baza unei statistici calculate pentru un eşantion, numită **estimator**, se face o apreciere despre parametrul corespunzător al populației de referință.

Punct estimat: o singură valoare calculată pentru un eşantion şi folosită pentru a face o apreciere despre parametrul corespunzător al populației de referință.

7

TESTAREA IPOTEZELOR DESPRE O SINGURĂ POPULAȚIE

În acest capitol sunt expuse tehnici statistice de testare a ipotezelor despre o singură populație. Într-un astfel de caz, pe baza unei statistici calculate pentru un eşantion, cel mai adesea o medie aritmetică sau o proporție, se trage o concluzie despre parametrul corespunzător al populației de referință. Mai precis, cercetarea constă din alcătuirea unui eşantion aleatoriu din populația de referință, culegerea informației relevante din eşantion, calcularea valorii unei statistici şi compararea acestei valori cu valoarea presupusă a parametrului corespunzător. În aproape toate situațiile de cercetare vom găsi o anumită diferență între cele două valori, iar tehnicile de testare a ipotezelor permit să se decidă dacă diferența este atât de mare încât să justifice respingerea presupunerii făcute pentru populație.

Tehnicile de testare a ipotezelor prezentate în acest capitol şi în capitolele care urmează sunt teste despre valoarea parametrilor unei populații şi cer îndeplinirea unor condiții sau supoziții despre populațiile respective, cum este, în principal, normalitatea. Testele de acest fel se numesc **teste parametrice**.

7.1. TESTUL SCORURILOR Z PENTRU MEDII ARITMETICE CÂND σ ESTE CUNOSCUT

Vom prezenta acest test cu ajutorul unui exemplu, pe care îl vom folosi şi pentru a introduce noţiunile fundamentale ale testelor parametrice: *ipoteză de nul*, *ipoteză alternativă*, *statistică a testului* şi *regulă de decizie*.

Un cercetător presupune că într-un anumit an, media aritmetică a punctajelor obţinute la examenul de rezidenţiat al medicilor este de 800. Pentru a testa această ipoteză, cercetătorul alcătuieşte un eşantion aleatoriu de 130 de medici care şi-au susţinut rezidenţiatul în acel an şi constată că la nivelul acestui eşantion media aritmetică a punctajului obţinut este de 755. Prin investigaţii extensive, cercetătorul ştie că abaterea standard la nivelul populaţiei de referinţă este de aproximativ 152. Problema care se pune este dacă diferenţa dintre media aritmetică a eşantionului şi valoarea presupusă pentru populaţie este sau nu statistic semnificativă. Dacă răspunsul este afirmativ, atunci ipoteza făcută poate fi respinsă. Dacă, însă, răspunsul este negativ, atunci diferenţa poate fi pusă pe seama întâmplării, astfel că ipoteza cercetătorului nu poate fi respinsă. După cum vom vedea, testul scorurilor Z permite determinarea matematică a înţelesului termenului „statistic semnificativ“. Datele problemei sunt, deci, următoarele:

Populaţie	Eşantion
$\mu_H = 800$	$\overline{X} = 755$
$\sigma = 152$	$n = 130$

Am notat cu μ_H media aritmetică presupusă a populaţiei, pentru a o deosebi de media aritmetică efectivă a populaţiei, μ.

Ipoteza de nul, pe care o vom nota H_0, specifică o anumită valoare pentru parametrul respectiv. În general, ipoteza de nul despre media aritmetică a unei populaţii are forma:

$$H_0\colon \mu = \mu_H$$

Denumirea de „ipoteză de nul“ se justifică prin aceea că forma sa poate fi redată echivalent prin:

$$H_0: \mu - \mu_H = 0$$

În cuvinte, ipoteza de nul enunţă că nu există nici o diferenţă semnificativă între valoarea efectivă a parametrului respectiv şi valoarea presupusă a acelui parametru. Dacă ipoteza de nul este adevărată, atunci diferenţa dintre eşantion şi populaţie nu este semnificativă, putând fi atribuită întâmplării.

În mod obişnuit, cercetătorul este de părere că există o diferenţă semnificativă între eşantion şi populaţie şi doreşte să respingă ipoteza de nul ca neadevărată. Această opinie constituie **ipoteza alternativă**, pe care o vom nota cu H_a. Dacă cercetătorul nu are posibilitatea sau nu doreşte să prezică sensul diferenţei, atunci ipoteza alternativă ia forma

$$H_a: \mu \neq \mu_H$$

Dacă, însă, sensul diferenţei dintre eşantion şi populaţie poate fi prezis sau dacă cercetătorul este interesat doar de un singur sens al diferenţei, atunci ipoteza alternativă poate lua una dintre următoarele două forme:

$$H_a: \mu > \mu_H$$

$$H_a: \mu < \mu_H$$

În cazul în care H_a are forma $\mu \neq \mu_H$, se spune că testul este **bilateral** sau **non-direcţional**, iar în cazurile în care H_a are una dintre celelalte două forme, se spune că testul este **unilateral** sau **direcţional**. Vom reveni la aceste noţiuni ceva mai departe. Să reţinem deocamdată că în orice test se decide dacă se respinge sau nu se respinge ipoteza de nul, pe baza dovezilor aduse în sprijinul ipotezei alternative. Astfel, dacă putem respinge H_0 ca neadevărată, atunci vom accepta H_a.

Revenind la exemplul nostru, ipoteza de nul este H_0: μ = 800. Din enunţul problemei rezultă că nu este vorba despre un sens al diferenţei menţionate, astfel că ipoteza alternativă este H_a: $\mu \neq 800$.

Termenul **statistică a testului** se referă la formula a cărei aplicare în testul respectiv permite obţinerea unei valori ce formează baza deciziei asupra ipotezei de nul. Pentru mediile aritmetice, atunci când se cunoaşte sau se poate aproxima valoarea lui σ, statistica testului este dată de următoarea formulă:

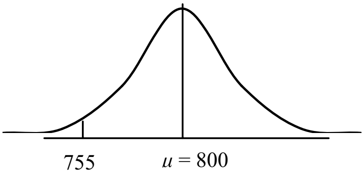
Formula 7.1. $$Z = \frac{\overline{X} - \mu_H}{\sigma / \sqrt{n}}$$

Să notăm că această formulă este analogă structural formulelor de calcul pentru transformarea unui scor „brut“ X în scorul Z corespunzător (v. secțiunea 4.2), aici fiind vorba despre scorul Z al unei medii aritmetice. Ca atare, în numitorul formulei 7.1 apare abaterea standard a distribuției de eşantionare a $\overline{X}$, astfel că această formulă ne dă distanța în abateri standard sau fracțiuni de abateri standard a mediei aritmetice a eşantionului, $\overline{X}$, față de valoarea presupusă pentru populație. În exemplul nostru, avem:

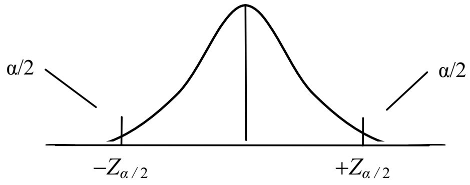
$$Z = \frac{\overline{X} - \mu_H}{\sigma / \sqrt{n}} = \frac{755 - 800}{152 / \sqrt{130}} = \frac{-45}{152/11{,}40} = \frac{-45}{13{,}4} = -3{,}36$$

Din motive care vor deveni imediat evidente, vom desemna rezultatul aplicării formulei 7.1 prin **Z (obținut)**. Aici, Z (obținut) = –3,36.

Regula de decizie se referă la o anumită amplitudine de valori pentru rezultatul statisticii testului, numită **zonă critică** sau **zonă de respingere**, care conduce la respingerea ipotezei de nul. În cazul testului scorurilor Z pentru medii aritmetice, zona critică se stabileşte cu ajutorul distribuției de eşantionare a $\overline{X}$. Astfel, în exemplul de mai sus, eşantionul alcătuit este unul dintre toate eşantioanele posibile cu n = 130 din populația de referință. Să presupunem că H_0 este adevărată. Dacă s-ar calcula toate mediile aritmetice posibile, atunci teorema limitei centrale asigură următorul rezultat:

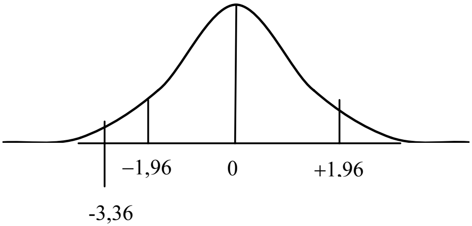


În general, cu cât $\overline{X}$ este mai aproape de centru (diferența dintre $\overline{X}$ și $\mu_{\overline{X}} = \mu$ este mai mică), cu atât vom fi mai înclinați să nu respingem ipoteza de nul şi cu cât $\overline{X}$ este mai departe de centru (diferența dintre $\overline{X}$ și $\mu_{\overline{X}} = \mu$ este mai mare), cu atât vom fi mai înclinați să respingem ipoteza de nul. Cu alte cuvinte, ipoteza de nul poate fi respinsă dacă rezultatul statisticii testului este un număr negativ „prea mare“ sau un număr pozitiv „prea mare“. Înțelesul expresiei „prea mare“ se fixează prin alegerea unui nivel de încredere sau nivel α (revedeți capitolul anterior). În cazul ipotezei alternative de forma H_a: $\mu \neq \mu_H$, nivelul α ales se împarte în mod egal în cele două extremități ale distribuției de eşantionare:



Aria de sub $-Z_{\alpha/2}$ plus aria de peste $+Z_{\alpha/2}$ reprezintă zona critică: dacă scorul Z corespunzător mediei aritmetice a unui eşantion cade în această arie (i.e. sub $-Z_{\alpha/2}$ sau peste $+Z_{\alpha/2}$), atunci media aritmetică respectivă are prin definiție o probabilitate de apariție mai mică decât α. Scorurile $-Z_{\alpha/2}$ şi $+Z_{\alpha/2}$ se numesc **scoruri *Z* critice** şi se desemnează, respectiv, prin **$-Z_{\alpha/2}$ (critic)** şi **$+Z_{\alpha/2}$ (critic)**.

Să revenim iarăşi la exemplul nostru şi să stabilim $\alpha = 0{,}05$. Ştim că pentru această valoare a lui α, $Z_{\alpha/2} = \pm 1{,}96$. Z (obținut) se află în zona critică ($-3{,}36 < -1{,}96$), după cum se ilustrează în figura următoare:



Ca atare, suntem îndreptăţiţi să respingem ipoteza de nul: probabilitatea de apariţie a mediei aritmetice a eşantionului considerat este mai mică decât 0,05 şi deci nu poate fi atribuită întâmplării. Cu alte cuvinte, diferenţa dintre media aritmetică a eşantionului şi media aritmetică presupusă pentru populaţie este statistic semnificativă (eşantionul de rezidenţi diferă semnificativ de populaţia din care a fost selectat), astfel că ipoteza de nul poate fi respinsă.

De notat că decizia pe care am luat-o (respingerea ipotezei de nul) comportă un element de risc: această decizie poate fi greşită, întrucât este posibil ca eşantionul considerat să fie unul dintre puţinele eşantioane nereprezentative pentru populaţia de medici rezidenţi. O trăsătură foarte importantă a testării ipotezelor constă din aceea că probabilitatea de a lua o decizie greşită este cunoscută, fiind dată de nivelul α ales. În exemplul nostru, probabilitatea de a lua o decizie greşită este de 0,05. A spune că probabilitatea de a fi respins greşit ipoteza de nul este de 0,05 revine la a spune că, dacă am repeta acest test de o infinitate de ori, vom respinge greşit H_0 doar de 5 ori la fiecare 100 de repetări. Rezultatul de mai sus poate fi enunţat şi spunând că diferenţa menţionată este statistic semnificativă la un nivel de încredere de 95%. Ca şi pentru estimarea intervalelor, nivelurile de încredere folosite în mod obişnuit în testarea ipotezelor sunt 90%, 95% şi 99%.

Testul întreprins în acest exemplu este *bilateral* sau *nedirecţional*. În general, într-un astfel de test, ipoteza alternativă enunţă doar că există o diferenţă între valoarea efectivă a parametrului respectiv şi valoarea presupusă pentru acel parametru. După cum am văzut, în cazul unui test

bilateral, zona critică specificată de nivelul α se împarte în mod egal în cele două extremități ale distribuției de eşantionare. Într-un test bilateral, indiferent de nivelul α ales, regula de decizie este următoarea:

Se respinge H_0, dacă Z (obținut) > $+Z_{\alpha/2}$ (critic)
sau dacă Z (obținut) < $-Z_{\alpha/2}$ (critic)

Într-un test *unilateral* sau *direcțional*, dacă cercetătorul crede că valoarea efectivă a parametrului este mai mare decât valoarea presupusă, H_a ia forma $\mu > \mu_H$, iar pentru un test în sensul opus, H_a ia forma $\mu < \mu_H$.. În cazul unui test unilateral, întreaga zonă critică specificată de nivelul α este plasată în extremitatea de interes a distribuției de eşantionare. De pildă, într-un test bilateral în care $\alpha = 0,05$, zona critică începe de la $Z_{\alpha/2}$ (critic) = ±1,96. Într-un test unilateral, la acelaşi nivel α, Z_α (critic) este +1,65 dacă este vorba despre extremitatea superioară (dacă H_a este de forma $\mu > \mu_H$) şi este −1,65 dacă este vorba despre extremitatea inferioară (dacă H_a este de forma $\mu < \mu_H$)[31]. De notat că aici folosim Z_α în loc de $Z_{\alpha/2}$, întrucât întreaga zonă critică este plasată într-o singură extremitate a distribuției de eşantionare.

Într-un test unilateral, indiferent de nivelul α ales, dacă H_a este de forma $\mu > \mu_H$ („test unilateral dreapta“), atunci regula de decizie este

se respinge H_0, dacă Z (obținut) > $+Z_\alpha$ (critic)

Dacă H_a este de forma $\mu < \mu_H$ („test unilateral stânga“) atunci regula de decizie este

se respinge H_0, dacă Z (obținut) < $-Z_\alpha$ (critic)

După cum rezultă şi din cele de mai sus, un test unilateral este mai „bun“ decât unul bilateral, deoarece zona critică este „trasă“ mai aproape de media aritmetică, îmbunătățind astfel probabilitatea de a respinge H_0. Astfel, dacă cercetătorul are mai multă experiență şi mai multe cunoştințe în legătură cu variabila investigată, atunci se recomandă folosirea unui test unilateral, ceea ce cere o ipoteză alternativă direcțională.

Se obişnuieşte ca testarea ipotezelor statistice să fie organizată sub forma unui „model în *n* paşi“, numărul de paşi diferind de la un autor la

---

[31] Scădem 0,05 din 0,5 (proporția de cazuri aflate de o parte şi de alta a mediei aritmetice a distribuției de eşantionare). Rezultatul scăderii este 0,4500. Conform tabelului distribuției normale standard, scorul *Z* corespunzător acestei proporții este 1,65.

altul în funcție de anumite opțiuni de compactare sau de detaliere a informației. În cele ce urmează vom folosi un model în 4 paşi, pe care îl exemplificăm pentru problema tratată mai sus:

Pasul 1. Enunțarea ipotezelor

$$H_0: \mu = 800$$

$$H_a: \mu \neq 800$$

Pasul 2. Selectarea distribuției de eşantionare şi stabilirea zonei critice

Distribuția de eşantionare = Distribuția Z

$\alpha = 0{,}05$ (test bilateral)

$Z_{\alpha/2}$ (critic) = ±1,96

(Zona critică este notată prin scorurile Z care îi marchează începuturile).

Pasul 3. Calcularea statisticii testului

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu_H}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{755 - 800}{152/\sqrt{130}} = \frac{-45}{152/11{,}40} = \frac{-45}{13{,}4} = -3{,}36$$

Pasul 4. Luarea deciziei

Întrucât Z (obținut) se află în zona critică ($-3{,}36 < -1{,}96$), ipoteza de nul poate fi respinsă. Diferența dintre eşantionul de medici rezidenți şi populația de referință nu poate fi atribuită întâmplării sau, altfel spus, această diferență este statistic semnificativă (la un nivel de încredere de 95%).

Pentru a ilustra aplicarea unui test unilateral, să presupunem că cercetătorul din exemplul de mai sus doreşte să testeze ipoteza că media aritmetică a populației de rezidenți este mai mică decât 800, toate celelalte date fiind aceleaşi. În acest caz, cercetătorul este interesat doar de extremitatea stângă a distribuției de eşantionare şi va plasa întreaga zonă critică în această extremitate. În termenii modelului în patru paşi, testul decurge după cum urmează:

Pasul 1. Enunțarea ipotezelor

$$H_0: \mu = 800$$

$$H_a: \mu < 800$$

Pasul 2. Selectarea distribuției de eşantionare şi stabilirea zonei critice

Distribuția de eşantionare = Distribuția Z

$\alpha = 0{,}05$ (test unilateral stânga)

Z_α (critic) $= -1{,}65$

Pasul 3. Calcularea statisticii testului

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu_H}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{755 - 800}{152/\sqrt{130}} = \frac{-45}{152/11{,}40} = \frac{-45}{13{,}4} = -3{,}36$$

Pasul 4. Luarea deciziei

Întrucât Z (obținut) se află în zona critică ($-3{,}36 < -1{,}65$), ipoteza de nul poate fi respinsă şi se poate accepta că media aritmetică a populației de rezidenți este mai mică decât 800 (la un nivel de încredere de 95%).

7.2. ERORI ÎN TESTAREA IPOTEZELOR

Atunci când decidem să respingem sau să nu respingem ipoteza de nul, sunt posibile patru situații, descrise în figura următoare:

Figura 7.1. Rezultatele unui test al ipotezelor

	H_0 adevărată	H_0 falsă
Se respinge H_0	Eroare de tipul I	Decizie corectă
Nu se respinge H_0	Decizie corectă	Eroare de tipul II

După cum se indică în figura 7.1, H_0 este în realitate adevărată sau falsă şi sunt posibile două decizii: se respinge H_0 sau nu se respinge H_0. Ca atare, sunt posibile două decizii corecte: respingerea unei ipoteze de nul false şi nerespingerea unei ipoteze de nul adevărate. Corespunzător, sunt posibile două decizii greşite: respingerea unei ipoteze ne nul care este adevărată, numită **eroare de tipul I**, şi nerespingerea unei ipoteze de nul care este falsă, numită **eroare de tipul II**. Probabilitatea de a comite o eroare de tipul I este desemnată prin α, iar probabilitatea de a comite o eroare de tipul II este desemnată prin β.

Probabilitatea de a comite o eroare de tipul I este determinată de nivelul α ales. Astfel, atunci când se alege un nivel α, distribuția de eşantionare este împărțită în două mulțimi de rezultate ale eşantioanelor posibile: zona critică, ce include toate rezultatele definite ca improbabile sau rare şi care îndreptățesc respingerea H_0, şi zona necritică, ce constă din toate rezultatele definite drept „non-rare". Cu cât nivelul α este mai mic, cu atât este mai mică zona critică şi, corespunzător, este mai mare distanța dintre media aritmetică a distribuției de eşantionare şi începuturile (în cazul unui test bilateral) sau începutul (în cazul unui test unilateral) zonei critice. De pildă, dacă se alege $\alpha = 0,05$, probabilitatea de a comite o eroare de tipul I este de 0,05: dacă H_0 este respinsă, există 5 şanse din 100 ca această decizie să fie greşită; dacă $\alpha = 0,01$, probabilitatea de a comite o eroare de tipul I este de 0,01: dacă H_0 este respinsă, există doar o şansă din 100 ca această decizie să fie greşită. Prin urmare, pentru a minimiza probabilitatea de a comite o eroare de tipul I, trebuie să folosim niveluri α foarte mici.

Pe de altă parte, cu cât nivelul α este mai mic, cu atât este mai mare zona necritică şi, păstrând celelalte date constante, este mai puțin probabil ca rezultatul obținut pe eşantion să cadă în zona critică, deci este mai mare probabilitatea de a comite o eroare de tipul II.

Prin urmare, cele două probabilități sunt invers proporționale, nefiind posibil să le minimizăm pe amândouă: dacă alegem un nivel α foarte mic pentru a minimiza probabilitatea de a comite o eroare de tipul I, creşte probabilitatea de a comite o eroare de tipul II. Cu alte cuvinte, dacă creştem dificultatea de a respinge ipoteza de nul, probabilitatea de a nu respinge ipoteza de nul atunci când aceasta este falsă creşte. În mod normal,

în ştiinţele omului se doreşte minimizarea probabilităţii erorii de tipul I, socotită a fi mai gravă decât eroarea de tipul II, astfel că se aleg valori mici pentru α.

În tabelul următor sunt prezentate câteva scoruri Z critice pentru niveluri α mai des folosite, atât pentru teste bilaterale, cât şi pentru teste unilaterale:

Tabelul 7.1. Scoruri Z critice

Niveluri α test bilateral	Niveluri α, test unilateral	Scoruri Z critice
0,20	0,10	1,29
0,10	0,05	1,65
0,05	0,025	1,96
0,01	0,005	2,58

De regulă, nivelul α = 0,05 este considerat drept un indicator bun al unui rezultat semnificativ.

7.3. TESTAREA IPOTEZELOR PENTRU MEDII ARITMETICE CÂND σ ESTE NECUNOSCUT

Ca şi în privinţa estimării intervalelor, în aproape toate situaţiile reale de cercetare, valoarea abaterii standard a populaţiei este necunoscută. Şi aici vom distinge două cazuri: cazul în care dimensiunea eşantionului este mare, ceea ce înseamnă eşantioane cu $n > 30$, şi cazul $n \leq 30$. În cazul eşantioanelor cu $n > 30$, σ se poate estima prin s, iar în pasul 3 se foloseşte următoarea formulă:

Formula 7.2.

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu_H}{s/\sqrt{n-1}}$$

Această formulă diferă de formula 7.1 prin aceea că σ este înlocuit cu *s*, iar *n* este înlocuit cu $n - 1$ pentru a se corecta distorsiunea lui *s*.

În cazul eşantioanelor cu $n \leq 30$, distribuţia de eşantionare este distribuţia *t*–Student, prezentată în capitolul 6, iar în pasul 3 se foloseşte următoarea formulă:

Formula 7.3.
$$t = \frac{\overline{X} - \mu_H}{s/\sqrt{n-1}}$$

Vom spune că este vorba despre **testul scorurilor *t* pentru medii aritmetice** şi vom desemna rezultatul aplicării formulei 7.3 prin ***t* (obţinut)**.

Să presupunem că un cercetător primeşte informaţia neverificată conform căreia media aritmetică a coeficientului de inteligenţă al participanţilor la fazele naţionale ale olimpiadelor de matematică din ultimii 10 ani este de aproximativ 125. Pentru a testa această ipoteză, cercetătorul selectează un eşantion aleatoriu de 20 de olimpici la matematică din ultimii 10 ani şi constată că media aritmetică a coeficientului de inteligenţă la nivelul eşantionului este de 123, abaterea standard la nivelul eşantionului fiind de 8. Cercetătorul este interesat să determine la un nivel de încredere de 99% dacă media aritmetică a coeficientului de inteligenţă al participanţilor la fazele naţionale ale olimpiadelor de matematică din ultimii 10 ani este mai mare de 125. Datele problemei sunt, deci, următoarele:

Populaţie	Eşantion
$\mu_H = 125$	$\overline{X} = 123$
	$s = 8$
	$n = 20$

Pasul 1. Enunţarea ipotezelor

$$H_0: \mu = 125$$

$$H_a: \mu > 125$$

Pasul 2. Selectarea distribuției de eşantionare şi stabilirea zonei critice

Distribuția de eşantionare = Distribuția t

$\alpha = 0{,}01$ (test unilateral dreapta)

$gl = 20 - 1 = 19$

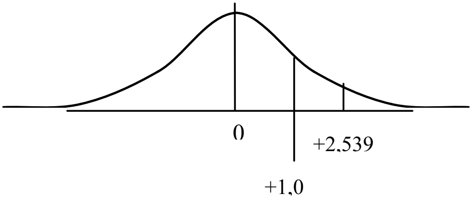
t_α (critic) = +2,539

Pasul 3. Calcularea statisticii testului

$$t = \frac{\overline{X} - \mu_H}{s/\sqrt{n-1}} = \frac{125 - 123}{8/\sqrt{19}} = \frac{2}{8/4{,}36} = +1{,}09$$

Pasul 4. Luarea deciziei

Întrucât t (obținut) nu cade în zona critică (+1,09 < +2,539), cercetătorul nu poate respinge ipoteza de nul. Pe baza mediei aritmetice a eşantionului nu se poate conchide la un nivel de încredere de 99% că media aritmetică a coeficientului de inteligență al participanților la fazele naționale ale olimpiadelor de matematică din ultimii 10 ani este mai mare de 125. Rezultatul acestui test este prezentat grafic în figura următoare:



În cazul folosirii distribuției t ca distribuție de eşantionare, regulile de decizie au aceeaşi structură cu cele ale testului scorurilor Z. Astfel, într-un test bilateral, indiferent de nivelul α ales şi de numărul de grade de libertate, regula de decizie este următoarea:

se respinge H_0, dacă t (obținut) > $+t_{\alpha/2}$ (critic)
sau dacă t (obținut) < $-t_{\alpha/2}$ (critic)

Într-un test unilateral dreapta ($\mu > \mu_H$), regula de decizie este

se respinge H_0, dacă t (obținut) > $+t_\alpha$ (critic)

În fine, într-un test unilateral stânga ($\mu < \mu_H$), regula de decizie este

se respinge H_0, dacă t (obținut) < $-t_\alpha$ (critic)

7.4. TESTUL SCORURILOR *Z* PENTRU PROPORȚII

Atunci când variabila de interes nu este de interval sau de raport, astfel încât să se justifice calcularea mediei aritmetice, se poate utiliza proporția eşantionului (p) în loc de media aritmetică. În cele ce urmează, prezentăm un test al ipotezelor pentru proporții, aplicabil în cazul eşantioanelor pentru care $np \geq 5$ şi $n(1-p) \geq 5$.

În acest test, formula de calcul pentru Z (obținut) are aceeaşi structură cu formula 7.1: Z (obținut) este egal cu mărimea pentru eşantion minus valoarea presupusă pentru parametrul corespunzător, totul de împărțit la abaterea standard a distribuției de eşantionare. Din capitolul anterior, ştim că proporțiile pentru eşantioane (p) au distribuții de eşantionare aproximativ normale, cu media aritmetică (μ_p) egală cu proporția pentru populație (P) şi abaterea standard (σ_p) egală cu $\sqrt{P(1-P)/n}$. Teoretic, formula de calcul al testului scorurilor Z pentru proporții este următoarea:

Formula 7.4.

$$Z = \frac{p - P_H}{\sqrt{P(1-P)/n}}$$

unde P_H este proporția presupusă pentru populație. Acum, valoarea proporției pentru populație, P, nu este cunoscută. Ca şi în cazul estimării intervalelor pentru proporții, putem estima valoarea lui P prin p, lucrând cu formula următoare:

Formula 7.5.

$$Z = \frac{p - P_H}{\sqrt{p(1-p)/n}}$$

Să considerăm un exemplu. Se pretinde că aproximativ 10% dintre studenții unei mari universități sunt căsătoriți. Pentru testarea acestei ipoteze, se selectează un eşantion aleatoriu de 200 de studenți de la universitatea respectivă şi se constată că 24 de studenți din eşantion sunt căsătoriți. În baza acestui rezultat, se poate spune la un nivel de încredere de 95% că mai mult de 10% dintre studenți sunt necăsătoriți? Datele problemei sunt următoarele:

Populație	Eşantion
$P_H = 0{,}10$	$p = 0{,}12$
	$n = 200$

Folosind formula 7.5, testul decurge după cum urmează:

Pasul 1. Enunțarea ipotezelor

$$H_0\text{: } P = 0{,}10$$

$$H_a\text{: } P > 0{,}10$$

Pasul 2. Selectarea distribuției de eşantionare şi stabilirea zonei critice

Distribuția de eşantionare = Distribuția Z

$\alpha = 0{,}05$ (test unilateral dreapta)

Z_α (critic) = +1,65

Pasul 3. Calcularea statisticii testului

$$Z = \frac{p - P_H}{\sqrt{p(1-p)/n}} = \frac{0{,}12 - 0{,}10}{\sqrt{0{,}12(1-0{,}12)/300}} = \frac{0{,}02}{0{,}0188} = +1{,}06$$

Pasul 4. Luarea deciziei

Întrucât Z (obținut) nu cade în zona critică ($+1{,}06 < +1{,}65$), ipoteza de nul nu poate fi respinsă. La nivelul de încredere de 95% nu se poate spune că mai mult de 10% dintre studenți sunt necăsătoriți.

GLOSAR

Eroare de tipul I: respingerea unei ipoteze de nul care este adevărată; probabilitatea de a comite o eroare de tipul I este desemnată prin α.

Eroare de tipul II: nerespingerea unei ipoteze de nul care este falsă; probabilitatea de a comite o eroare de tipul II este desemnată prin β.

Ipoteză alternativă: în contextul statisticilor inferenţiale, ipoteză care enunţă că există o diferenţă între valoarea efectivă a unui parametru şi valoarea presupusă pentru acel parametru; dacă sensul diferenţei poate fi prezis, ipoteza alternativă este direcţională, în caz contrar este nedirecţională.

Ipoteză de nul: în contextul statisticilor inferenţiale, ipoteză care enunţă că nu există nici o diferenţă semnificativă între valoarea efectivă a unui parametru şi valoarea presupusă a acelui parametru.

Regulă de decizie: enunţ referitor la o anumită amplitudine de valori pentru rezultatul statisticii testului, numită zonă critică sau zonă de respingere, care conduce la respingerea ipotezei de nul.

Statistică a testului: formula a cărei aplicare în testul respectiv permite obţinerea unei valori ce formează baza deciziei asupra ipotezei de nul.

Teste parametrice: teste statistice despre valoarea parametrilor unei populaţii, care cer îndeplinirea unor condiţii sau supoziţii despre populaţiile respective, cum este, în principal, normalitatea.

Test bilateral: test statistic în care ipoteza alernativă este non-direcţională.

Test unilateral: test statistic în care ipoteza alternativă este direcţională.

8

TESTAREA IPOTEZELOR DESPRE DIFERENȚELE DINTRE DOUĂ POPULAȚII

Problema de cercetare abordată în capitolul 7 viza semnificația diferenței dintre valoarea unei statistici (medie aritmetică sau proporție) calculată pentru un eşantion şi valoarea presupusă a parametrului corespunzător al populației de referință. În acest capitol sunt expuse procedee de testare a ipotezelor privind diferențele dintre mediile aritmetice a două populații, $\mu_1 - \mu_2$, şi dintre proporțiile a două populații, $P_1 - P_2$. Problema centrală în acest caz poate fi formulată după cum urmează: diferența dintre două eşantioane sub aspectul variabilei de interes este suficient de mare pentru a putea conchide, cu o probabilitate de eroare cunoscută, că populațiile reprezentate de eşantioane sunt diferite sub aspectul variabilei respective?

Toate testele statistice prezentate în continuare sunt aplicabile sub supoziția că eşantioanele selectate aleatoriu din cele două populații de referință sunt independente. Două eşantioane sunt **independente** dacă selectarea cazurilor pentru un eşantion nu influențează selectarea cazurilor pentru celălalt eşantion. Astfel, testele prezentate în acest capitol nu pot fi aplicate atunci când între cele două eşantioane există o dependență de vreun fel sau altul, de pildă în situațiile experimentale în care aceiaşi subiecți sunt testați înainte şi după aplicarea unui tratament.

8.1. TESTUL SCORURILOR *Z* PENTRU DIFERENȚA DINTRE DOUĂ MEDII ARITMETICE

Testul expus în această secțiune este aplicabil dacă, pe lângă independența eşantioanelor, sunt satisfăcute următoarele două condiții: (i) nivelul de măsură al variabilei de interes este de interval sau de raport şi (ii) cele două eşantioane sunt relativ mari, ceea ce înseamnă $n_1 > 30$ şi $n_2 > 30$.

Distribuția de eşantionare la care ne vom referi în continuare este *distribuția de eşantionare a diferențelor dintre mediile aritmetice ale eşantioanelor*, despre care se demonstrează că este normală dacă distribuțiile de eşantionare separate ale mediilor aritmetice ale eşantioanelor sunt normale. Teorema limitei centrale garantează că aceste distribuții de eşantionare aproximează cu atât mai bine normalitatea, cu cât dimensiunile eşantioanelor sunt mai mari. Astfel, atunci când eşantioanele sunt mari, pentru descrierea acestei distribuții de eşantionare se poate folosi distribuția *Z*.

Ipoteza de nul este şi în acest caz un enunț de tipul „nici o diferență“, numai că este vorba despre diferența dintre două populații sub aspectul variabilei de interes. Astfel, forma ipotezei de nul este H_0: $\mu_1 = \mu_2$ sau, echivalent, H_0: $\mu_1 - \mu_2 = 0$.

Ipoteza alternativă corespunde tipului de test, bilateral sau unilateral, intenționat de cercetător. Pentru un test bilateral, ipoteza alternativă este de forma H_a: $\mu_1 \neq \mu_2$. Dacă testul este unilateral, atunci ipoteza de nul poate lua una dintre următoarele două forme:

$$H_a: \mu_1 > \mu_2$$

$$H_a: \mu_1 < \mu_2$$

Prima formă corespunde unui test unilateral în care întreaga zonă critică este plasată în extremitatea dreaptă a distribuției de eşantionare, iar cea de-a doua formă corespunde unui test unilateral în care întreaga zonă critică este plasată în extremitatea stângă a distribuției de eşantionare. Dacă rezultatul statisticii testului cade în zona critică, atunci ipoteza de nul poate fi respinsă, fiind acceptată ipoteza diferenței sub aspectul variabilei de interes.

Teoretic, formula de calcul al testului scorurilor Z pentru diferenţa dintre două medii aritmetice este următoarea:

Formula 8.1.
$$Z = \frac{(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sigma \overline{x}_1 - \overline{x}_2}$$

în care $\overline{X}_1 - \overline{X}_2$ = diferenţa dintre mediile aritmetice ale eşantioanelor;

$\mu_1 - \mu_2$ = diferenţa dintre mediile aritmetice ale populaţiilor;

$\sigma \overline{x}_1 - \overline{x}_2$ = abaterea standard a distribuţiei de eşantionare a diferenţelor dintre mediile aritmetice ale eşantioanelor.

În formula 8.1, cel de-al doilea termen al numărătorului, $\mu_1 - \mu_2$, este necunoscut. Acest termen se reduce însă la zero, întrucât testul are loc sub presupunerea că ipoteza de nul, $\mu_1 - \mu_2 = 0$, este adevărată. Mai departe, pentru eşantioane mari, distribuţia de eşantionare a diferenţelor dintre mediile aritmetice ale eşantioanelor se defineşte astfel:

$$\sigma \overline{x}_1 - \overline{x}_2 = \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$$

Întrucât valorile abaterilor standard ale populaţiilor, σ_1 şi σ_2, nu sunt aproape niciodată cunoscute, se utilizează abaterile standard ale eşantioanelor, cu corecţiile corespunzătoare pentru distorsiune. Astfel, formula folosită pentru estimarea abaterii standard a distribuţiei de eşantionare în această situaţie este următoarea:

Formula 8.2.
$$\sigma \overline{x}_1 - \overline{x}_2 = \sqrt{\frac{s_1^2}{n_1 - 1} + \frac{s_2^2}{n_2 - 1}}$$

Prin urmare, vom lucra practic cu formula următoare pentru Z (obţinut):

Formula 8.3.
$$Z = \frac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1 - 1} + \frac{s_2^2}{n_2 - 1}}}$$

Ca şi până acum, vom considera un exemplu. Un cercetător presupune că bărbaţii şi femeile diferă sub aspectul capacităţii de rezolvare de probleme. Pentru a verifica această ipoteză, cercetătorul alcătuieşte un eşantion aleatoriu de 127 de subiecţi şi le administrează un test de rezolvare de probleme. Eşantionul este apoi împărţit în două subeşantioane după criteriul sex, iar mărimile statistice sunt calculate pentru fiecare subeşantion, datele obţinute fiind următoarele:

Eşantion 1 (bărbaţi)	Eşantion 2 (femei)
$\overline{X}_1 = 62$	$\overline{X}_2 = 65$
$s_1 = 13$	$s_2 = 14$
$n_1 = 324$	$n_2 = 317$

Presupunând că testul de rezolvare de probleme furnizează date de interval sau de raport, se poate aplica testul scorurilor Z pentru semnificaţia diferenţei dintre două medii aritmetice. Se poate observa că scorul mediu al eşantionului 1 este mai mic decât cel al eşantionului 2. Prin aplicarea testului menţionat se poate afla dacă această diferenţă este suficient de mare pentru a îndreptăţi concluzia că există o diferenţă semnificativă între bărbaţi şi femei sub aspectul capacităţii de rezolvare de probleme şi nu o intervenţie a unor factori întâmplători.

Pasul 1. Enunţarea ipotezelor

$$H_0: \mu_1 = \mu_2$$

$$H_a: \mu_1 \neq \mu_2$$

Pasul 2. Selectarea distribuţiei de eşantionare şi stabilirea zonei critice

Distribuţia de eşantionare = Distribuţia Z

$\alpha = 0{,}05$ (test bilateral)

$Z_{\alpha/2}$ (critic) = $\pm 1{,}96$

Pasul 3. Calcularea statisticii testului

$$Z=\frac{\overline{X}_1-\overline{X}_2}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1-1}+\frac{s_2^2}{n_2-1}}}=\frac{62-65}{\sqrt{\frac{13^2}{323}+\frac{14^2}{316}}}=\frac{-3}{1,14}=-2,63$$

Pasul 4. Luarea deciziei

Întrucât Z (obținut) se află în zona critică ($-2,63 < -1,96$), ipoteza de nul poate fi respinsă, ceea ce reprezintă o dovadă în sprijinul ipotezei că bărbații şi femeile diferă sub aspectul capacității de rezolvare de probleme. Decizia de a respinge ipoteza de nul are o probabilitate de doar 0,05 de a fi greşită.

8.2. TESTUL SCORURILOR *t* PENTRU DIFERENȚA DINTRE DOUĂ MEDII ARITMETICE

Atunci când abaterile standard ale populațiilor nu sunt cunoscute şi eşantioanele sunt mici ($n_1 \leq 30$ sau/şi $n_2 \leq 30$), distribuția de eşantionare folosită este distribuția t–Student, cu $n_1 + n_2 - 2$ grade de libertate. Teoretic, formula de calcul al testului scorurilor t pentru diferența dintre două medii aritmetice este următoarea:

Formula 8.4.

$$t=\frac{(\overline{X}_1-\overline{X}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{\sigma\overline{x}_1-\overline{x}_2}$$

Ca mai sus, termenul $\mu_1 - \mu_2$ se reduce la zero, întrucât testul are loc sub presupunerea că ipoteza de nul, $\mu_1 - \mu_2 = 0$, este adevărată. În cazul testului prezentat în această secțiune, formula folosită pentru estimarea abaterii standard a distribuției de eşantionare este următoarea:

Formula 8.5. $$\sigma\bar{x}_1 - \bar{x}_2 = \sqrt{\frac{n_1 s_1^2 + n_2 s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}} \cdot \sqrt{\frac{n_1 + n_2}{n_1 n_2}}$$

Astfel, pentru a afla valoarea lui t (obținut) vom folosi următoarea formulă:

Formula 8.6. $$t = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sqrt{\frac{n_1 s_1^2 + n_2 s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}} \cdot \sqrt{\frac{n_1 + n_2}{n_1 n_2}}}$$

Este important de notat că testul scorurilor t pentru două medii aritmetice poate fi folosit doar dacă cele două populații sunt egal dispersate sau, altfel spus, au abaterile standard egale ($\sigma_1 = \sigma_2$). Această condiție este necesară pentru a justifica supoziția de normalitate a distribuției de eşantionare şi a estima abaterea standard a acesteia. Egalitatea dispersiilor poate fi testată formal[32]. Pentru scopuri practice, putem considera că supoziția $\sigma_1 = \sigma_2$ este satisfăcută în măsura în care eşantioanele au dimensiuni apropiate[33].

Un cercetător presupune că o anumită metodă modernă de predare a matematicii conduce la rezultate mai bune decât metodele tradiționale. Pentru a verifica această ipoteză, cercetătorul alcătuieşte un eşantion aleatoriu de 25 de elevi, pe care îl împarte aleatoriu în două grupuri. Un grup de 12 elevi este repartizat într-o clasă în care matematica este predată după metoda modernă, iar celălalt grup de 13 elevi este repartizat într-o clasă în care matematica este predată după metode tradiționale. După un an, ambele grupuri primesc acelaşi test la matematică, obținând următoarele rezultate:

Grupul 1 (m. modernă)	Grupul 2 (m. tradițională)
$\bar{X}_1 = 8{,}80$	$\bar{X}_2 = 8{,}20$
$s_1 = 1{,}70$	$s_2 = 1{,}20$
$n_1 = 12$	$n_2 = 13$

[32] Vezi, de pildă, Hinkle, Wiersma şi Jurs, 1988, pp. 280 – 284.
[33] Vezi Healey, 1984.

Mediile aritmetice ale grupurilor diferă în sensul prezis ($\mu_1 > \mu_2$). Aplicarea testului t arată dacă această diferenţă este sau nu statistic semnificativă. Fie $\alpha = 0{,}05$.

Pasul 1. Enunţarea ipotezelor

$$H_0: \mu_1 = \mu_2$$
$$H_a: \mu_1 > \mu_2$$

Pasul 2. Selectarea distribuţiei de eşantionare şi stabilirea zonei critice

Distribuţia de eşantionare = Distribuţia t

$\alpha = 0{,}05$ (test unilateral)

$gl = 12 + 13 - 2 = 23$

t_α (critic) = +1,714

Pasul 3. Calcularea statisticii testului

$$t = \frac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2}{\sqrt{\frac{n_1 s_1^2 + n_2 s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}} \cdot \sqrt{\frac{n_1 + n_2}{n_1 n_2}}} = \frac{8{,}80 - 8{,}20}{\sqrt{\frac{12(1{,}70)^2 + 13(1{,}20)^2}{23}} \cdot \sqrt{\frac{25}{156}}} =$$

$$= \frac{0{,}60}{\sqrt{2{,}32} + \sqrt{0{,}16}} = \frac{0{,}60}{1{,}52 + 0{,}4} = \frac{0{,}60}{1{,}92} = +0{,}31$$

Pasul 4. Luarea deciziei

Întrucât t (obţinut) nu se află în zona critică (+0,31 < +1,714), ipoteza de nul nu poate fi respinsă la un nivel de încredere de 95%. Diferenţa dintre cele două grupuri nu este statistic semnificativă.

8.3. TESTUL SCORURILOR *Z* PENTRU DIFERENȚA DINTRE DOUĂ PROPORȚII

Testul scorurilor *Z* pentru semnificația diferenței dintre două proporții este aplicabil atunci când eşantioanele sunt mari ($n_1 > 30$ şi $n_2 > 30$) şi este asemănător cu testul pentru medii aritmetice. Ipoteza de nul enunță că nu există nici o diferență semnificativă între populațiile din care sunt alcătuite eşantioanele, ipoteza alternativă putând fi direcțională sau non-direcțională.

Teoretic, formula de calcul al testului scorurilor *Z* pentru diferența dintre două proporții este următoarea:

Formula 8.7.

$$Z = \frac{(p_1 - p_2) - (P_1 - P_2)}{\sigma p_1 - p_2}$$

în care $p_1 - p_2$ = diferența dintre proporțiile eşantioanelor;

$P_1 - P_2$ = diferența dintre proporțiile populațiilor;

$\sigma p_1 - p_2$ = abaterea standard a distribuției de eşantionare a diferențelor dintre proporțiile eşantioanelor.

Ca şi pentru medii aritmetice, cel de-al doilea termen al numărătorului, $P_1 - P_2$, se reduce la zero, întrucât testul are loc sub presupunerea că ipoteza de nul, $P_1 - P_2 = 0$, este adevărată. Formula folosită pentru estimarea abaterii standard a distribuției de eşantionare este următoarea:

Formula 8.8.

$$\sigma p_1 - p_2 = \sqrt{P^*(1 - P^*)} \cdot \sqrt{\frac{n_1 + n_2}{n_1 n_2}}$$

Cantitatea P^* se numeşte **estimare combinată a proporțiilor** pentru cele două populații şi este dată de următoarea formulă:

Formula 8.9.

$$P^* = \frac{n_1 p_1 + n_2 p_2}{n_1 + n_2}$$

Prin urmare, pentru a afla valoarea lui Z (obținut) vom folosi următoarea formulă:

Formula 8.10.

$$Z = \frac{p_1 - p_2}{\sqrt{P^*(1-P^*)} \cdot \sqrt{\frac{n_1 + n_2}{n_1 n_2}}}$$

Să presupunem că au fost alcătuite două eşantioane de studenți, unul de 83 de studenți de la Universitatea *A* şi celălalt de 103 studenți de la Universitatea *B*, fiecare student fiind chestionat în legătură cu problema interzicerii avorturilor şi clasificat într-una dintre categoriile: *De acord*, *Împotrivă*, *Nedecis*. Proporția studenților care s-au declarat de acord cu interzicerea avorturilor a fost de 0,34 în primul eşantion (*A*) şi de 0,25 în cel de-al doilea (*B*). Există o diferență semnificativă între studenții celor două universități sub acest aspect?

Eşantion 1 (*A*)	Eşantion 2 (*B*)
p_1 = 0,34	p_2 = 0,25
n_1 = 83	n_2 = 103

Pasul 1. Enunțarea ipotezelor

$$H_0: P_1 = P_2$$

$$H_a: P_1 \neq P_2$$

Pasul 2. Selectarea distribuției de eşantionare şi stabilirea zonei critice

Distribuția de eşantionare = Distribuția Z

α = 0,05 (test bilateral)

$Z_{\alpha/2}$ (critic) = ±1,96

Pasul 3. Calcularea statisticii testului

$$P^* = \frac{n_1 p_1 + n_2 p_2}{n_1 + n_2} = \frac{83(0,34) + 103(0,25)}{83 + 103} = \frac{28,22 + 25,75}{186} = \frac{53,97}{186} = 0,29$$

$$Z = \frac{p_1 - p_2}{\sqrt{P^*(1 - P^*)} \cdot \sqrt{\frac{n_1 + n_2}{n_1 n_2}}} = \frac{0,34 - 0,25}{\sqrt{0,29(1 - 0,29)} \cdot \sqrt{\frac{83 + 103}{83 \cdot 103}}} = \frac{0,09}{0,07} = +1,29$$

Pasul 4. Luarea deciziei

Întrucât Z (obținut) nu cade în zona critică (+1,29 < +1,69), nu se poate respinge ipoteza de nul. Studenții de la cele două universități nu diferă semnificativ în privința acordului cu interzicerea avorturilor.

GLOSAR

Eşantioane aleatorii independente: eşantioane aleatorii alcătuite în aşa fel încât selectarea cazurilor pentru un eşantion nu influenţează selectarea cazurilor pentru celălalt eşantion.

9

ANALIZA DE VARIANȚĂ (ANOVA)

Am expus până acum proceduri pentru testarea ipotezelor privind o populație sau două populații. În acest capitol se prezintă o procedură de testare a ipotezei conform căreia mediile aritmetice ale k populații ($k \geq 2$) sunt egale. Această procedură este numită **analiza de varianță** (ANOVA[34]). Ipoteza de nul testată în ANOVA are următoarea formă:

$$H_0: \mu_1 = \mu_2 = \ldots = \mu_k$$

Conform ipotezei alternative, H_a, cel puțin o medie aritmetică diferă de celelalte.

9.1. ANOVA PENTRU O VARIABILĂ INDEPENDENTĂ

Înainte de a trece la expunerea testului ANOVA pentru o variabilă independentă, să notăm că într-un experiment psihologic cercetătorul manipulează cel puțin o variabilă şi înregistrează răspunsurile subiecților în privința unei alte variabile, cu scopul de a constata eventualul efect al primei variabile asupra celei de-a doua. De pildă, cercetătorul poate expune un grup de subiecți unor condiții de stres şi un alt grup unor condiții normale, pentru a constata dacă stresul influențează îndeplinirea unei anumite sarcini. Variabila manipulată este numită *variabilă independentă*, iar variabila care este observată şi măsurată este numită *variabilă dependentă*.

---

[34] Prescurtarea uzuală de la denumirea procedurii în limba engleză: „Analysis of Variance".

Un cercetător presupune că subiecţii supuşi unui interviu vor furniza cu atât mai multe informaţii cu caracter personal, cu cât se află mai aproape de intervievator. Pentru a verifica această presupunere, cercetătorul montează un experiment la care participă 15 subiecţi. Fiecare subiect primeşte aceleaşi întrebări de la acelaşi intervievator. Variabila independentă (A) este *distanţa faţă de intervievator*, cu următoarele categorii: *mică* (0,5 metri), *medie* (1,5 metri), *mare* (2 metri). Pentru a fi intervievaţi, subiecţii sunt repartizaţi aleatoriu într-una dintre cele trei categorii ale variabilei independente. Variabila dependentă (B) este *numărul de răspunsuri cu caracter personal date de subiect*. Datele obţinute, împreună cu mărimile necesare pentru ANOVA sunt prezentate în următorul tabel:

Tabelul 9.1. Calcule iniţiale pentru ANOVA, o variabilă independentă

Distanţa faţă de intervievator		
Mică	**Medie**	**Mare**
33	21	20
24	25	13
31	19	15
29	27	10
34	26	14
T_1 = 151	T_2 = 118	T_3 = 72
n_1 = 5	n_2 = 5	n_3 = 5
$\overline{X}_1$ = 30,20	$\overline{X}_2$ = 23,60	$\overline{X}_3$ = 14,40
ΣX_1^2 = 4623	ΣX_2^2 = 2832	ΣX_3^2 = 1090
T_1^2 = 22801	T_2^2 = 13294	T_3^2 = 5184

Pentru fiecare grup i, T_i este totalul scorurilor individuale, n_i este numărul de subiecţi, $\overline{X}_i$ este media aritmetică a scorurilor, ΣX_i^2 este suma pătratelor scorurilor individuale, iar T_i^2 este pătratul totalului scorurilor. De notat că grupurile obţinute sunt independente, precum şi că formulele

de calcul care urmează sunt aplicabile şi în cazul în care este vorba despre un număr diferit de subiecţi în fiecare grup.

În ANOVA, pentru o variabilă independentă se consideră două *surse de variaţie*: (i) variaţia mediilor aritmetice ale grupurilor şi (ii) variaţia datorată diferenţelor dintre subiecţii din fiecare grup, care poate fi atribuită procesului de eşantionare. Pentru început, se calculează trei **sume de pătrate ale abaterilor faţă de medie** sau, pe scurt, **sume de pătrate**. Vom desemna generic prin *SS* aceste sume de pătrate[35]: (1) SS_{TOTAL} – suma pătratelor abaterilor fiecărui scor individual faţă de media aritmetică a tuturor scorurilor, numită şi *marea medie*; (2) SS_A – suma pătratelor abaterilor fiecărei medii de grup faţă de marea medie; (3) SS_{EROARE} – suma pătratelor abaterilor fiecărui scor individual faţă de media aritmetică a grupului respectiv. Litera „*A*“ din SS_A arată că lucrăm cu varianţa sistematică a variabilei independente *A*. SS_A reflectă prima sursă de variaţie, iar SS_{EROARE} pe cea de-a doua.

Putem calcula aceste abateri direct pe baza datelor din tabel. Întrucât astfel de calcule sunt greoaie, vom utiliza formule simplificate.

Formula 9.1. $$SS_{TOTAL} = \sum X^2 - \frac{G^2}{N}$$

în care ΣX^2 = suma pătratelor scorurilor individuale ale tuturor subiecţilor din experiment $= \Sigma X_1^2 + \Sigma X_2^2 + \Sigma X_3^2$;

G^2 = pătratul totalului tuturor scorurilor = $(T_1 + T_2 + T_3)^2$;

N = numărul total de subiecţi din experiment.

Dacă se efectuează calculele pe hârtie sau cu un calculator de buzunar, este convenabil să se afle mai întâi ΣX^2 pentru scorurile din fiecare grup, aşa cum am făcut în tabelul de mai sus, după care să se adune aceste sume. Aplicăm formula 9.1:

$$SS_{TOTAL} = \sum X^2 - \frac{G^2}{N} = (4623 + 2823 + 1090) - \frac{(151 + 118 + 72)^2}{15} =$$
$$= 8545 - 7752{,}07 = 792{,}93$$

[35] Prescurtarea uzuală de la denumirea din limba engleză „Sum of squares“.

Atunci când calculăm SS_{TOTAL} este recomandabil să reținem termenii diferenței, 8 545 şi 7 752,07, pe care îi vom folosi pentru simplificarea calculelor ulterioare.

O dată ce am calculat SS_{TOTAL}, putem calcula SS_A după următoarea formulă:

Formula 9.2. $$SS_A = \sum \frac{T_i^2}{n_i} - \frac{G^2}{n}$$

În această formulă, T_i este un simbol general pentru T_1, T_2 şi T_3, iar n_i este un simbol general pentru n_1, n_2 şi n_3. Astfel, o dată ce cantitatea T_i^2 / n_i este calculată pentru fiecare grup, cantitățile sunt adunate, după cum arată simbolul Σ. Să notăm că a doua parte a formulei 9.2, G^2/N, a fost deja calculată, atunci când am obținut SS_{TOTAL}, aşa încât vom prelua direct rezultatul respectiv în calculul SS_A:

$$SS_A = \sum \frac{T_i^2}{n_i} - \frac{G^2}{n} = \left(\frac{T_1^2}{n_1} + \frac{T_2^2}{n_2} + \frac{T_3^2}{n_3} \right) - \frac{G^2}{N} =$$

$$\left(\frac{151^2}{5} + \frac{118^2}{5} + \frac{72^2}{5} \right) - 7752{,}07 =$$

$$= 8381{,}80 - 7752{,}07 = 629{,}73$$

Şi aici vom reține unul dintre termenii diferenței, şi anume 8 381,80, pe care îl vom folosi pentru calculul SS_{EROARE}, după următoarea formulă:

Formula 9.3. $$SS_{EROARE} = \sum X^2 - \sum \frac{T_i^2}{n_i}$$

Ambele cantități cerute de această formulă au fost calculate anterior, când am obținut SS_{TOTAL} şi, respectiv, SS_A, aşa încât vom prelua direct rezultatele respective în calculul SS_{EROARE}:

$$SS_{EROARE} = \sum X^2 - \sum \frac{T_i^2}{n_i} = 8545 - 8381{,}80 = 163{,}20$$

De notat că $SS_{TOTAL} = SS_A + SS_{EROARE}$. Această relație poate fi utilizată pentru a controla corectitudinea calculelor.

Pasul următor în calculul ANOVA constă în calcularea a două **medii aritmetice ale sumelor de pătrate ale abaterilor față de medie** sau, pe scurt, **medii aritmetice ale sumelor de pătrate**. Vom desemna generic prin *MS* aceste medii[36]: (1) MS_A – media aritmetică pentru SS_A, numită *varianța sistematică* şi (2) MS_{EROARE} – media aritmetică pentru SS_{EROARE}, numită *varianța de eroare*.

Formula 9.4. $$MS_A = \frac{SS_A}{k-1}$$

În această formulă, *k* este numărul de grupuri, $k - 1$ fiind numărul de grade de libertate asociate SS_A, pe care îl vom nota în continuare cu gl_A.

$$MS_A = \frac{SS_A}{k-1} = \frac{629{,}73}{3-1} = \frac{629{,}73}{2} = 314{,}87$$

Formula 9.5. $$MS_{EROARE} = \frac{SS_{EROARE}}{N-k}$$

Aici, $N - k$ reprezintă numărul de grade de libertate asociate SS_{EROARE}, pe care îl vom nota în continuare cu gl_{EROARE}.

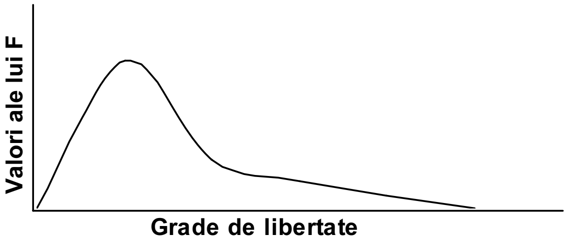
$$MS_{EROARE} = \frac{SS_{EROARE}}{N-k} = \frac{163{,}20}{15-3} = \frac{163{,}20}{12} = 13{,}60$$

Distribuția de eşantionare în ANOVA este distribuția *F* (numită astfel în onoarea britanicului Ronald Fisher (1890-1962), biolog şi statistician, inventatorul ANOVA). Forma aproximativă a unei curbe *F* este următoarea:

---

[36] Prescurtarea uzuală de la denumirea din limba engleză „Mean squares".

Figura 9.1. Un exemplu de curbă *F*



Forma exactă a unei curbe *F* depinde de valorile pentru gl_A şi, respectiv, pentru gl_{EROARE}. De notat că folosirea distribuţiei *F* cere ca variabila dependentă să fie normal distribuită în cele *k* populaţii şi ca aceste populaţii să fie egal dispersate[37]. În **tabelul distribuţiei *F*** (vezi Anexa D) în prima coloană din stânga sunt trecute gradele de libertate pentru MS_{EROARE} ($gl_{EROARE} = N - k$), de la 1 la 120 şi ∞. Pe cea de-a doua coloană din stânga apar nivelurile α. Pe primul rând al tabelului apar gradele de libertate pentru MS_A ($gl_A = k - 1$), de la 1 la 120 şi ∞.

Figura 9.2. Schema tabelului valorilor critice ale distribuţiei *F*

gl_{EROARE} *(gl2)*	α	gl_A *(gl1)* 1 2 ....120 ∞
1	0,25	....
	0,10	....
	0,05	....
2	.	....
.	.	....
.	.	....
120	.	....
	.	....
	.	....
∞	.	....

---

[37] Supoziţia omogenităţii dispersiei şi cea a normalităţii distribuţiei, împreună cu ipoteza de nul „spun“ că distribuţiile la nivelul populaţiilor au aceeaşi formă, aceeaşi medie aritmetică şi aceeaşi abatere standard sau, cu alte cuvinte, că este vorba despre una şi aceeaşi populaţie.

La intersecția rândului pentru $N - k$ grade de libertate şi nivelul α ales cu coloana pentru $k - 1$ grade de libertate se găseşte F (critic), adică valoarea care marchează începutul zonei critice în distribuția F. În exemplul nostru, pentru $N - k = 12$ şi $k - 1 = 2$, alegând un nivel $\alpha = 0,05$, F (critic) = 3,8853 sau, rotunjit, 3,89. Valoarea pentru F (obținut) se calculează cu formula următoare:

Formula 9.6.
$$F = \frac{MS_A}{MS_{EROARE}}$$

Dacă intervin doar factori întâmplători, valoarea aşteptată pentru F (obținut) este 1,0. Cu cât este mai mare valoarea pentru F (obținut), cu atât este mai mică probabilitatea ca rezultatele experimentului să se datoreze întâmplării. Regula de decizie este următoarea:

se respinge H_0, dacă F (obținut) > F (critic)

În exemplul nostru,

$$F = \frac{MS_A}{MS_{EROARE}} = \frac{314,87}{13,60} = 23,15$$

Întrucât F (obținut) cade în zona critică (23,15 > 3,89), vom conchide că rezultatele experimentului sunt semnificative şi vom respinge ipoteza că mediile aritmetice sunt egale la nivelul populației.

În termenii modelului în patru paşi, testul ANOVA pentru o variabilă independentă, în exemplul nostru, decurge după cum urmează:

Pasul 1. Enunțarea ipotezelor

H_0: $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3$

H_a: Cel puțin o medie aritmetică diferă de celelalte.

Pasul 2. Selectarea distribuției de eşantionare şi stabilirea zonei critice

Distribuția de eşantionare = Distribuția F

$\alpha = 0,05$

$gl_{EROARE} = N - k = 12$

$$gl_A = k - 1 = 2$$
$$F(\text{critic}) = 3{,}89$$

Pasul 3. Calcularea statisticii testului

Organizarea calculului ANOVA se face cu ajutorul unui tabel de calcule inițiale (v. tabelul 9.1), precum şi al unui tabel ANOVA rezumativ, numit **tabel al surselor de variație**. Forma generală a unui astfel de tabel este următoarea:

Sursa de variație	Sume de pătrate	Grade de libertate	Medii ale sumelor	*F* (obținut)
A	SS_A	$k - 1$	MS_A	
EROARE	SS_{EROARE}	$N - k$	MS_{EROARE}	MS_A / MS_{EROARE}
TOTAL	SS_{TOTAL}	$N - 1$		

În exemplul nostru, avem următorul tabel:

Tabelul 9.2. ANOVA rezumativ, o variabilă independentă

Sursa de variație	Sume de pătrate	Grade de libertate	Medii ale sumelor	*F* (obținut)
A	629,73	2	314,87	
EROARE	163,20	12	13,60	23,15
TOTAL	792,93	14		

Pasul 4. Luarea deciziei

Întrucât, *F* (obținut) cade în zona critică (23,15 > 3,89), ipoteza de nul este respinsă. La nivelul populației, mediile aritmetice ale scorurilor corespunzătoare celor trei distanțe diferă semnificativ. Enunțul de probabilitate asociat acestei concluzii este următorul: probabilitatea ca diferența observată între mediile aritmetice ale grupurilor să apară din întâmplare, dacă H_0 ar fi în realitate adevărată, este mai mică de 0,05.

De notat că în cazul în care se consideră mai mult de două categorii ale variabilei independente (ca în exemplul nostru în care avem trei grupuri), *F* (obținut) nu arată care este grupul care diferă semnificativ de

celelalte. O modalitate de a examina diferenţa dintre două grupuri este de a utiliza formula SS_A pentru a calcula suma pătratelor şi media sumei de pătrate pentru cele două grupuri (numărul de grade de libertate în acest caz fiind 2 – 1) şi de a utiliza cantitatea MS_{EROARE}, calculată anterior, ca eroare de varianță pentru calcularea *F* (obținut). Au fost dezvoltate şi metode mai sofisticate pentru a evalua diferenţa dintre două grupuri, după ce s-a determinat un *F* (obținut) semnificativ, numite *teste de comparare multiplă post hoc*, precum şi metode de testare a unor ipoteze specifice privind diferențele dintre medii, numite *comparații a priori* sau *comparații planificate*[38].

9.2. ANOVA PENTRU DOUĂ VARIABILE INDEPENDENTE

Testul ANOVA pentru două variabile independente este o extindere a testului ANOVA pentru o singură variabilă independentă, cu excepția faptului că formulele testului expus în această secțiune sunt aplicabile doar în cazul grupurilor independente cu acelaşi număr de subiecți în fiecare grup. Vom folosi aceeaşi manieră de expunere ca mai sus: vom prezenta un exemplu ipotetic, un tabel de calcule inițiale, formulele de calcul ale testului ANOVA pentru două variabile independente, precum şi modelul în patru paşi specific acestui test.

20 de elevi sunt supuşi unui experiment privind metodele de instruire în matematică. Variabila independentă, *A*, este, deci, *metoda de instruire*. Elevii sunt repartizați aleatoriu în două clase: o clasă la care se utilizează metoda tradițională (*A1*) şi o clasă la care se utilizează o metodă modernă (*A2*). Variabila independentă, *B*, este *nivelul IQ*, cu categoriile : *B1* (< 90) şi *B2* (≥ 90). Informația prezentată la cele două clase este aceeaşi. La sfârşitul perioadei de instruire elevii dau acelaşi test. Rezultatul (scorul) obținut la acest test este variabila dependentă. Experimentul permite evaluarea a trei efecte: (i) efectul principal al variabilei *A* (dacă una dintre metode conduce la rezultate diferite față de cealaltă), (ii) efectul principal al variabilei

[38] Vezi Hinkle, Wiersma şi Jurs, 1988, capitolul 16.

B (dacă elevii cu un IQ superior obţin rezultate diferite faţă de ceilalţi), (iii) interacţiunea *A* × *B* (dacă efectul unei variabile independente diferă în funcţie de un anumit nivel al celeilalte variabile independente).

După cum reiese şi din cele de mai sus, un astfel de experiment are mai multe avantaje. Mai întâi, prin analiza simultană a două variabile independente se realizează, de fapt, două cercetări altfel distincte. Pe lângă investigarea modului în care diferitele categorii ale celor două variabile independente afectează variabila dependentă, se poate verifica dacă nivelurile uneia dintre variabilele independente afectează variabila dependentă în acelaşi fel ca şi nivelurile celeilalte variabile independente. Apoi, este vorba despre investigarea interacţiunii dintre două variabile independente. Întrucât, în situaţiile reale, efectul unei variabile independente este adesea afectat de una sau mai multe variabile independente, studiul interacţiunii dintre variabilele independente poate fi un obiectiv foarte important al cercetării.

Revenind la exemplul nostru ipotetic, datele obţinute, împreună cu mărimile necesare pentru ANOVA sunt prezentate în următorul tabel:

Tabelul 9.3. Calcule inițiale pentru ANOVA, două variabile independente

Metoda (*A*)	Nivelul IQ (*B*) B1	B2	
Tradițională (*A1*)	75 70 69 72 68	90 95 89 85 91	
	T_{A1B1} = 354 n_{A1B1} = 5 $\overline{X}_{A1B1}$ = 70,80 ΣX^2_{A1B1} = 25094	T_{A1B2} = 450 n_{A1B2} = 5 $\overline{X}_{A1B2}$ = 90,00 ΣX^2_{A1B2} = 40552	T_{A1} = 804 n_{A1} = 10 $\overline{X}_{A1}$ = 80,40
Modernă (*A2*)	85 87 83 90 89	87 94 93 89 92	
	T_{A2B1} = 434 n_{A2B1} = 5 $\overline{X}_{A2B1}$ = 86,80 ΣX^2_{A2B1} = 37704	T_{A2B2} = 455 n_{A2B2} = 5 $\overline{X}_{A2B2}$ = 91,00 ΣX^2_{A2B2} = 41439	T_{A2} = 788 n_{A2} = 10 $\overline{X}_{A2}$ = 88,90
	T_{B1} = 788 n_{B1} = 10 $\overline{X}_{B1}$ = 78,80	T_{B2} = 905 n_{B2}= 10 $\overline{X}_{B2}$ = 90,50	

În ANOVA pentru două variabile independente se testează trei ipoteze de nul, fiecare corespunzând unei surse de variație:

H_{01}: La nivelul populației nu există nici o diferență între mediile aritmetice ale rezultatelor obținute prin cele două metode.

H_{02}: La nivelul populației nu există nici o diferență între mediile aritmetice ale rezultatelor obținute de elevii cu nivele IQ diferite.

H_{03}: La nivelul populației nu există interacțiune între cele două variabile.

H_{01} corespunde variației mediilor aritmetice ale scorurilor variabilei dependente din fiecare categorie a variabilei *A*. H_{02} corespunde variației

mediilor aritmetice ale scorurilor variabilei dependente din fiecare categorie a variabilei B. H_{03} corespunde variației mediilor aritmetice ale scorurilor variabilei dependente din categoriile combinate $A \times B$.

În acest caz, se calculează cinci sume de pătrate: (1) SS_{TOTAL}, (2) SS_A, (3) SS_B, (4) $SS_{A \times B}$ şi (5)SS_{EROARE}.

SS_{TOTAL} se calculează cu ajutorul formulei 9.1:

$$SS_{TOTAL} = \sum X^2 - \frac{G^2}{N} = \left(\sum X^2_{A1B1} + \sum X^2_{A1B2} + \sum X^2_{A2B1} + \sum {}^2_{A2B2}\right) -$$

$$- \frac{(T_{A1B1} + T_{A1B2} + T_{A2B1} + T_{A2B2})^2}{N} = (25094 + 40552 + 37704 + 41439) -$$

$$- \frac{(354 + 450 + 434 + 455)^2}{20} = 144789 - 143312{,}45 = 1476{,}55$$

Şi aici, atunci când calculăm SS_{TOTAL}, este recomandabil să reținem termenii diferenței, 144 789 şi 143 312,45, pe care îi vom folosi pentru simplificarea calculelor ulterioare.

Formula 9.2 este modificată corespunzător pentru calculul SS_A şi SS_B. Astfel, SS_A se calculează cu ajutorul următoarei formule:

Formula 9.7. $$SS_A = \sum \frac{T_a^2}{n_a} - \frac{G^2}{n}$$

În această formulă, T_a este un simbol general pentru T_{A1} şi T_{A2}, iar n_a este un simbol general pentru n_{A1} şi n_{A2}. Prin urmare, atunci când calculăm SS_A, luăm în considerare doar grupurile variabilei independente A.

$$SS_A = \sum \frac{T_a^2}{n_a} - \frac{G^2}{n} = \left(\frac{T_{A1}^2}{n_{A1}} + \frac{T_{A2}^2}{n_{A2}}\right) - \frac{G^2}{N} = \left(\frac{804^2}{10} + \frac{889^2}{10}\right) - 143312{,}45 =$$
$$= 143673{,}70 - 143312{,}45 = 361{,}25$$

SS_B se calculează cu ajutorul următoarei formule:

Formula 9.8. $$SS_B = \sum \frac{T_b^2}{n_b} - \frac{G^2}{n}$$

În această formulă, T_b este un simbol general pentru T_{B1} şi T_{B2}, iar n_b este un simbol general pentru n_{B1} şi n_{B2}. Prin urmare, atunci când calculăm SS_B, luăm în considerare doar grupurile variabilei independente *B*.

$$SS_B = \sum \frac{T_B^2}{n_B} - \frac{G^2}{n} = \left(\frac{T_{B1}^2}{n_{B1}} + \frac{T_{B2}^2}{n_{B2}} \right) - \frac{G^2}{N} = \left(\frac{788^2}{10} + \frac{905^2}{10} \right) - 143312{,}45 =$$
$$= 143996{,}90 - 143312{,}45 = 684{,}45$$

Calculăm acum $SS_{A \times B}$, cu ajutorul următoarei formule:

Formula 9.9. $$SS_{A\times B} = \sum \frac{T_{ab}^2}{n_{ab}} - \frac{G^2}{N} - SS_A - SS_B$$

În această formulă, T_{ab} este un simbol general pentru T_{A1B1}, T_{A1B2}, T_{A2B1} şi T_{A2B2}, iar n_{ab} este un simbol general pentru n_{A1B1}, n_{A1B2}, n_{A2B1} şi n_{A2B2}. Prin urmare, atunci când calculăm $SS_{A \times B}$, luăm în considerare grupurile constituite după categoriile combinate $A \times B$.

$$SS_{A\times B} = \left(\frac{T_{A1B1}^2}{n_{A1B1}} + \frac{T_{A1B2}^2}{n_{A1B2}} + \frac{T_{A2B1}^2}{n_{A2B1}} + \frac{T_{A2B2}^2}{n_{A2B2}} \right) - \frac{G^2}{N} - SS_A - SS_B =$$
$$= \left(\frac{354^2}{5} + \frac{450^2}{5} + \frac{434^2}{5} + \frac{455^2}{5} \right) - 143312{,}45 - 361{,}25 - 684{,}25 =$$
$$= 144639{,}40 - 143312{,}45 - 361{,}25 - 684{,}45 = 281{,}25$$

Şi aici vom reţine unul dintre termenii diferenţei, şi anume 144 639,40, pe care îl vom folosi pentru calculul SS_{EROARE}, după următoarea formulă:

Formula 9.10. $$SS_{EROARE} = \sum X^2 - \sum \frac{T_{ab}^2}{n_{ab}}$$

Ambele cantități cerute de această formulă au fost calculate anterior, când am obținut SS_{TOTAL} şi, respectiv, $SS_{A \times B}$, aşa încât vom prelua direct rezultatele respective în calculul SS_{EROARE}:

$$SS_{EROARE} = \sum X^2 - \sum \frac{T_{ab}^2}{n_{ab}} = 144789 - 144639{,}40 = 149{,}60$$

De notat că $SS_{TOTAL} = SS_A + SS_B + SS_{A \times B} + SS_{EROARE}$. Această relație poate fi utilizată pentru a controla corectitudinea calculelor.

Mediile aritmetice ale sumelor de pătrate pentru fiecare sursă de varianță se calculează prin împărțirea sumei de pătrate respectivă la numărul corespunzător de grade de libertate.

Formula 9.11. $$MS_A = \frac{SS_A}{k_A - 1}$$

În această formulă, k_A este numărul de grupuri constituite după categoriile variabilei A, iar $k_A - 1$ este numărul de grade de libertate asociate SS_A, notat cu gl_A. În exemplul nostru,

$$MS_A = \frac{SS_A}{k_A - 1} = \frac{361{,}25}{2 - 1} = 361{,}25$$

Formula 9.12. $$MS_B = \frac{SS_B}{k_B - 1}$$

În formula 9.12, $k_B - 1$ este numărul de grupuri constituite după categoriile variabilei B, iar $k_B - 1$ este numărul de grade de libertate asociate SS_B, notat cu gl_B. În exemplul nostru,

$$MS_B = \frac{SS_B}{k_B - 1} = \frac{684{,}45}{2 - 1} = 684{,}45$$

Formula 9.13. $$MS_{A \times B} = \frac{SS_{A \times B}}{(k_A - 1)(k_B - 1)}$$

În formula 9.13, $(k_A - 1)(k_B - 1)$ este numărul de grade de libertate asociat $SS_{A \times B}$, notat cu $gl_{A \times B}$. În exemplul nostru,

$$MS_{A\times B} = \frac{SS_{A\times B}}{(k_A - 1)(k_B - 1)} = \frac{281,25}{(2-1)(2-1)} = 281,25$$

Formula 9.14. $$MS_{EROARE} = \frac{SS_{EROARE}}{N - k_A k_B}$$

În formula 9.14, $N - k_A k_B$ este numărul de grade de libertate asociat SS_{EROARE}, notat cu gl_{EROARE}.

$$MS_{EROARE} = \frac{SS_{EROARE}}{N - k_A k_B} = \frac{149,60}{20-4} = \frac{149,60}{16} = 9,35$$

Valoarea pentru F (obținut) se calculează pentru fiecare sursă de varianță sistematică (efectele principale pentru A, pentru B şi pentru interacțiunea $A \times B$). Prezentăm în continuare formulele de calcul pentru F_A (obținut), F_B (obținut) şi $F_{A\times B}$ (obținut), împreună cu calculele respective, corespunzătoare exemplului nostru.

Formula 9.15. $$F_A = \frac{MS_A}{MS_{EROARE}}$$

$$F_A = \frac{MS_A}{MS_{EROARE}} = \frac{361,25}{9,35} = 38,64$$

Formula 9.16 $$F_B = \frac{MS_B}{MS_{EROARE}}$$

$$F_B = \frac{MS_B}{MS_{EROARE}} = \frac{684,45}{9,35} = 30,08$$

Formula 9.17 $$F_{A\times B} = \frac{MS_{A\times B}}{MS_{EROARE}}$$

$$F_{A\times B} = \frac{MS_{A\times B}}{MS_{EROARE}} = \frac{281,25}{9,35} = 30,08$$

Pentru luarea deciziei, fiecare valoare pentru *F* (obținut) se compară cu *F* (critic). Întrucât în fiecare caz din exemplul nostru, $gl_{EROARE} = 16$, iar numărul de grade de libertate din numărător pentru media aritmetică este egal cu 1 ($gl_A = gl_B = gl_{A\times B} = 1$), pentru $\alpha = 0,05$, *F* (critic) = 4,4940 sau, rotunjit, 4,49[39]. Deoarece fiecare *F* (obținut) este mai mare decât *F* (critic), toate cele trei ipoteze de nul pot fi respinse. De notat că toate cele trei ipoteze de nul pot fi respinse (rezultatele experimentului sunt semnificative) şi pentru $\alpha = 0,01$, pentru care *F* (critic) = 8,53.

În termenii modelului în patru paşi, testul ANOVA pentru două variabile independente decurge astfel:

Pasul 1. Enunțarea ipotezelor

H_{01}: La nivelul populației nu există nici o diferență între mediile aritmetice ale rezultatelor obținute prin cele două metode.

H_{a1}: La nivelul populației mediile aritmetice ale rezultatelor obținute prin cele două metode diferă.

H_{02}: La nivelul populației nu există nici o diferență între mediile aritmetice ale rezultatelor obținute de elevii cu niveluri *IQ* diferite.

H_{a2}: La nivelul populației mediile aritmetice ale rezultatelor obținute de elevii cu niveluri *IQ* diferite diferă.

H_{03}: La nivelul populației nu există interacțiune între cele două variabile.

---

[39] Evident, dacă cele trei grade de libertate ar fi fost diferite, am fi avut trei valori pentru *F* (critic).

H_{a3}: La nivelul populației există interacțiune între cele două variabile.

Pasul 2. Selectarea distribuției de eşantionare şi stabilirea zonelor critice.

Distribuția de eşantionare = distribuția F

$\alpha = 0{,}05$

$gl_{EROARE} = 16$

$gl_A = gl_B = gl_{A\times B} = 1$

F (critic) = 4,49

Pasul 3. Calcularea statisticii testului

Organizarea calculului ANOVA pentru două variabile independente se face cu ajutorul unui tabel de calcule inițiale (v. tabelul 9.3), precum şi al unui tabel ANOVA rezumativ (*tabel al surselor de variație*). În acest caz, forma generală a unui astfel de tabel este următoarea:

Sursa de variație	Sume de pătrate	Grade de libertate	Medii ale sumelor	F (obținut)
A	SS_A	$k_A - 1$	MS_A	MS_A/MS_{EROARE}
B	SS_B	$k_B - 1$	MS_B	MS_B/MS_{EROARE}
A×B	$SS_{A\times B}$	$(k_A - 1)(k_B - 1)$	$MS_{A\times B}$	$MS_{A\times B}/MS_{EROARE}$
EROARE	SS_{EROARE}	$N - k_A k_B$	MS_{EROARE}	
TOTAL	SS_{TOTAL}	$N - 1$		

În exemplul nostru, avem următorul tabel:

Tabelul 9.4 ANOVA rezumativ, două variabile independente

Sursa de variație	Sume de pătrate	Grade de libertate	Medii ale sumelor	*F* (obținut)
A	361,25	1	361,25	38,64
B	684,45	1	684,45	73,20
A×B	281,25	1	281,25	30,08
EROARE	149,60	16	9,35	
TOTAL	1476,55	19		

Pasul 4. Luarea deciziei

Întrucât fiecare valoare pentru *F* (obținut) este mai mare decât valoarea pentru *F* (critic), se resping cele trei ipoteze de nul. Pentru efectul principal al variabilei *A*, concluzia este că, la nivelul populației, mediile aritmetice ale rezultatelor obținute prin cele două metode diferă semnificativ. Pentru efectul principal al variabilei *B*, concluzia este că la nivelul populației, mediile aritmetice ale rezultatelor obținute de elevii cu nivele IQ diferite diferă semnificativ. Enunțul de probabilitate asociat ambelor concluzii este următorul: probabilitatea ca diferențele observate între mediile aritmetice ale grupurilor constituite după categoriile unei variabile independente să apară din întâmplare, dacă H_0 respectivă ar fi în realitate adevărată, este mai mică de 0,05 (şi după cum am văzut, chiar decât 0,01).

Pentru interacțiune, concluzia este că la nivelul populației există o interacțiune între metoda de instruire şi nivelul IQ al subiecților. Enunțul de probabilitate asociat acestei concluzii este următorul: probabilitatea ca diferențele observate între mediile aritmetice ale scorurilor din categoriile combinate ale celor două variabile să apară din întâmplare, dacă H_{03} ar fi în realitate adevărată, este mai mică de 0,05 (şi decât 0,01).

9.3 ANOVA PENTRU EŞANTIOANE DEPENDENTE

Calculele ANOVA considerate până acum sunt aplicabile doar în cazul eşantioanelor independente. În această secțiune se prezintă calculele ANOVA pentru cazul eşantioanelor dependente. Amintim că în acest caz

este vorba fie despre alcătuirea unor eşantioane astfel încât selectarea cazurilor pentru un eşantion influenţează selectarea cazurilor pentru un alt eşantion, fie despre situaţiile experimentale în care aceiaşi subiecţi sunt testaţi repetat.

Un cercetător presupune că atractivitatea fizică a candidaţilor la obţinerea unei slujbe influenţează judecata asupra competenţei profesionale a candidaţilor. Variabila independentă este deci atractivitatea fizică a candidaţilor, variabila dependentă fiind judecata asupra competenţei profesionale, măsurată pe o scală cu zece puncte. Cercetătorul alcătuieşte un eşantion aleatoriu cu opt subiecţi şi le prezintă două filme, în fiecare film apărând o femeie care răspunde la un test de aptitudini mecanice (îmbinarea unor piese). Cele două femei îndeplinesc sarcinile testului la fel de bine, dar una dintre ele este atractivă fizic, în timp ce cealaltă nu este atractivă fizic. Filmele sunt prezentate de mai multe ori, pentru a se controla efectul ordonării. Datele obţinute, împreună cu mărimile necesare pentru ANOVA sunt prezentate în următorul tabel:

Tabelul 9.5 Calcule iniţiale pentru ANOVA, eşantioane dependente

Subiecţi	Atractivitatea fizică (*A*)		T_s	T_s^2
	Neatractive (*A*1)	Atractive (*A*2)		
1	6	8	14	196
2	5	6	11	121
3	5	9	14	196
4	7	6	13	169
5	4	6	10	100
6	3	5	8	64
7	5	5	10	100
8	4	7	11	121
	$T_{A1} = 39$ $\Sigma^2_{A1} = 201$ $n_{A1} = 8$ $\overline{X}_{A1} = 4,88$	$T_{A2} = 52$ $\Sigma^2_{A2} = 352$ $n_{A2} = 8$ $\overline{X}_{A2} = 6,50$		$\Sigma T_s^2 =$ 1 067

În acest tabel, T_s se referă la totalul scorurilor acordate de fiecare subiect pentru cele două femei, T_s^2 este pătratul acestui total, iar ΣT_s^2 este suma acestor pătrate pentru toți subiecții.

Principala diferență dintre ANOVA pentru eşantioane dependente şi ANOVA pentru o variabilă independentă constă în aceea că efectul diferențelor dintre subiecți devine o sursă de varianță. În ANOVA pentru eşantioane dependente apar patru surse de varianță şi deci se calculează patru sume de pătrate: (1) SS_{TOTAL}, (2) SS_A, (3) $SS_{SUBIECȚI}$ şi (4)SS_{EROARE}.

SS_{TOTAL} se calculează cu ajutorul formulei 9.1:

$$SS_{TOTAL} = \sum X^2 - \frac{G^2}{N} = (201 + 352) - \frac{(39+52)^2}{16} = 553 - 517{,}56 = 35{,}44$$

SS_A se calculează cu ajutorul formulei 9.7:

$$SS_A = \sum \frac{T_a^2}{n_a} - \frac{G^2}{n} = \frac{39^2 + 52^2}{8} - 517{,}56 = 10{,}57$$

$SS_{SUBIECȚI}$ se calculează cu ajutorul următoarei formule:

Formula 9.18. $$SS_{SUBIECTI} = \sum \frac{T_S^2}{n_S} - \frac{G^2}{n}$$

Termenul n_S se referă la numărul de eşantioane dependente din experiment sau la numărul de scoruri pe care le dă fiecare subiect, astfel că în exemplul nostru, $n_S = 2$.

$$SS_{SUBIECTI} = \sum \frac{T_S^2}{n_S} - \frac{G^2}{n} = \frac{1067}{2} - 517{,}56 = 15{,}94$$

În fine, SS_{EROARE} se calculează cu ajutorul următoarei formule:

Formula 9.19.
$$SS_{EROARE} = SS_{TOTAL} - SS_A - SS_{SUBIECTI}$$
$$SS_{EROARE} = 35,44 - 10,57 - 15,94 = 8,93$$

Conform ipotezei de nul, atractivitatea fizică nu influenţează judecata asupra competenţei profesionale. Forma generală a unui tabel ANOVA rezumativ pentru eşantioane dependente este următoarea:

Sursa de variaţie	Sume de pătrate	Grade de libertate	Medii ale sumelor	*F* (obţinut)
A	SS_A	$k - 1$	MS_A	
SUBIECŢI	$SS_{SUBIECŢI}$	$s - 1$	-	MS_A / MS_{EROARE}
EROARE	SS_{EROARE}	$(k - 1)(s - 1)$	MS_{EROARE}	
TOTAL	SS_{TOTAL}	$N - 1$		

Procedurile de calcul pentru mediile sumelor de pătrate şi pentru *F* (obţinut) sunt similare cu cele deja cunoscute. De notat că, în acest caz, media sumei de pătrate şi *F* (obţinut) pentru $SS_{SUBIECŢI}$ nu se calculează. În mod obişnuit, nu este necesar să cunoaştem dacă există diferenţe semnificative între subiecţi. Aflarea cantităţii corespunzătoare sursei de varianţă $SS_{SUBIECŢI}$ contribuie, însă, la reducerea sursei de variaţie SS_{EROARE} (formula 9.19). În exemplul nostru, avem următorul tabel:

Tabelul 9.6. ANOVA rezumativ, eşantioane dependente

Sursa de variaţie	Sume de pătrate	Grade de libertate	Medii ale sumelor	*F* (obţinut)
A	10,57	1	10,57	
SUBIECŢI	15,94	7	-	8,26
EROARE	8,93	7	1,28	
TOTAL	35,44	15		

Lăsăm ca exercițiu pentru cititor formularea în termenii modelului în patru paşi a testului ANOVA aplicat aici, în principal a deciziei pentru $\alpha = 0{,}05$, precum şi a enunțului de probabilitate asociat concluziei[40].

[40] Vezi exercițiul 9.1.

GLOSAR

analiza de varianță (ANOVA): procedură de testare a ipotezei conform căreia mediile aritmetice ale k populații (k ≥ 2) sunt egale. Testul ANOVA poate fi considerat drept o extensie a testului privind diferența dintre două medii aritmetice.

Curbe F: grafice al distribuției F.

Distribuția F: distribuția de eșantionare în testul ANOVA.

10

TESTE NONPARAMETRICE

Toate testele statistice prezentate până acum se bazează pe anumite supoziţii privind parametrii populaţiilor din care sunt selectate eşantioanele, şi anume supoziţia de normalitate şi de omogenitate a abaterilor standard ale populaţiilor respective. **Testele nonparametrice** sunt teste de semnificaţie care nu necesită supoziţii particulare despre forma distribuţiei populaţiilor de referinţă, astfel că pot fi aplicate în special atunci când se lucrează cu eşantioane mici. În al doilea rând, testele nonparametrice sunt cu deosebire utile în psihologie, întrucât pot fi aplicate pentru variabile măsurate la nivel nominal sau ordinal.

10.1 TESTUL CHI–PĂTRAT (χ^2)

Testul chi–pătrat (χ^2) este aplicabil atunci când nivelul de măsură este nominal, datele fiind frecvenţe — numărul de cazuri care fac parte din categoriile variabilelor (variabilei) considerate. Esenţa acestui test constă din compararea **frecvenţelor observate** — frecvenţele efective obţinute empiric de către cercetător — cu **frecvenţele teoretice** sau **aşteptate** — frecvenţele calculate sub presupunerea că ipoteza de nul este adevărată. Testul examinează măsura în care frecvenţele observate sunt sau nu semnificativ diferite de frecvenţele care sunt aşteptate dacă ipoteza de nul este adevărată.

Distincţia dintre frecvenţele observate şi cele aşteptate poate fi înţeleasă cu ajutorul următorului exemplu intuitiv. Să presupunem că avem un zar şi dorim să verificăm ipoteza că zarul este nemăsluit. Pentru aceas-

ta, aruncăm zarul de 300 de ori şi observăm frecvenţa de apariţie a fiecărei feţe. Dacă ipoteza menţionată este adevărată, ne-am aştepta ca fiecare faţă să apară de aproximativ 50 de ori. Acum, să presupunem că observăm următoarele frecvenţe de apariţie:

Faţa	Număr de apariţii
1	42
2	55
3	38
4	57
5	64
6	44

Comparând frecvenţele observate cu cele teoretice, suntem îndreptăţiţi să spunem că zarul respectiv este măsluit sau diferenţele pot fi puse pe seama fluctuaţiilor întâmplătoare?

Testul chi–pătrat poate fi folosit pentru verificarea independenţei a două variabile sau pentru verificarea concordanţei dintre frecvenţele observate şi frecvenţele aşteptate ale unei singure variabile. Corespunzător, se vorbeşte despre **testul chi–pătrat pentru independenţă** şi despre **testul chi–pătrat pentru concordanţă**.

10.1.1. TESTUL CHI–PĂTRAT PENTRU INDEPENDENŢĂ

Două variabile sunt **independente reciproc** dacă, pentru toate cazurile din eşantionul considerat, clasificarea unui caz într-o categorie a unei variabile nu are nici un efect asupra probabilităţii ca acel caz să fie clasificat în oricare dintre categoriile celeilalte variabile[41]. De pildă, să presupunem că variabilele de interes sunt sexul şi dominanţa funcţional-operativă a mâinilor pentru un eşantion de 50 de bărbaţi şi 50 de femei. Aceste două variabile sunt independente reciproc în condiţiile în care clasificarea subiecţilor în categoriile unei variabile (*masculin – feminin*)

[41] A nu se confunda cazul independenţei reciproce a două variabile cu situaţiile experimentale în care apar două variabile independente, i.e. manipulate de experimentator.

nu are nici un efect asupra clasificării cazurilor în categoriile celeilalte variabile (*dreapta*, *stânga*, *ambidextru*). Acum, să presupunem că am efectuat un astfel de studiu şi am obţinut următoarele date:

Tabelul 10.1. Sexul şi dominanţa funcţional–operativă a mâinilor

Dominanţa	Sexul		TOTAL
	Masculin	*Feminin*	*TOTAL*
Dreapta	15	35	50
Stânga	30	10	40
Ambidextru	5	5	10
TOTAL	50	50	100

Un astfel de tabel rectangular, în care cazurile dintr-un eşantion sunt clasificate concomitent după categoriile a două variabile, se numeşte **tabel al contingenţelor**. Denumirile categoriilor unei variabile sunt folosite drept titluri de coloane, iar denumirile categoriilor celeilalte variabile sunt folosite drept titluri de rânduri. În corpul tabelului, intersecţia unui rând cu o coloană se numeşte **celulă**. Celulele indică numărul de cazuri clasificate concomitent în câte două categorii ale celor două variabile. Subtotalurile pentru fiecare coloană şi rând se numesc **marginale**. Marginalele indică distribuţiile de frecvenţe pentru fiecare categorie a variabilei respective sau, altfel spus, **distribuţiile univariate** de frecvenţe ale fiecărei variabile. La intersecţia marginalelor de pe linii şi coloane se prezintă numărul total de cazuri din eşantion (n).

În cazul testului chi–pătrat pentru independenţă, ipoteza de nul enunţă că variabilele sunt reciproc independente. În exemplul nostru, ipoteza de nul este că sexul nu are nici o influenţă asupra dominanţei funcţional–operative a mâinilor. Sub supoziţia că ipoteza de nul este adevărată, se calculează frecvenţele din celule la care ne-am aştepta, dacă ar interveni doar întâmplarea. Aceste frecvenţe aşteptate sunt apoi comparate, celulă cu celulă, cu frecvenţele observate în tabel. Dacă ipoteza de nul este adevărată, atunci diferenţele dintre frecvenţele aşteptate şi cele observate vor fi mici. Dacă însă ipoteza de nul este falsă, atunci aceste frecvenţe vor fi relativ mari. Cu cât sunt mai mari diferenţele dintre frecven-

țele așteptate și cele observate, cu atât este mai puțin probabil ca variabilele să fie în fapt reciproc independente și deci este cu atât mai probabil că vom putea respinge ipoteza de nul.

Pentru a afla **frecvența așteptată** pentru fiecare celulă a tabelului, folosim următoarea formulă:

Formula 10.1. $$f_a = \frac{f_r f_c}{n}$$

în care $f_r =$ marginalul rândului pe care este situată celula respectivă;

$f_c =$ marginalul coloanei pe care este situată celula respectivă;

$n =$ numărul total de cazuri din eșantion.

În cazul tabelului 10.1, frecvențele așteptate sunt următoarele:

	Masculin	Feminin
Dreapta	$\frac{50 \cdot 50}{100} = 25$	$\frac{50 \cdot 50}{100} = 25$
Stânga	$\frac{40 \cdot 50}{100} = 20$	$\frac{40 \cdot 50}{100} = 20$
Ambidextru	$\frac{10 \cdot 50}{100} = 5$	$\frac{10 \cdot 50}{100} = 5$

Calcularea statisticii testului chi–pătrat pentru independență se face cu ajutorul următoarei formule, care dă valoarea pentru χ^2 (obținut):

Formula 10.2 $$\chi^2 = \sum \frac{(f_o - f_a)^2}{f_a}$$

în care $f_o =$ frecvențele observate în celulele tabelului;

$f_a =$ frecvențele așteptate.

Astfel, o dată calculate frecvenţele aşteptate, formula 10.2 ne conduce la scăderea frecvenţei aşteptate din **frecvenţa observată** pentru fiecare celulă, ridicarea la pătrat a acestei diferenţe, împărţirea rezultatului la frecvenţa aşteptată pentru acea celulă şi apoi la însumarea valorilor rezultate ale tuturor celulelor. Calculele pentru exemplul nostru sunt ilustrate în tabelul 10.2.

Tabelul 10.2. Calculul χ^2 pentru datele din tabelul 10.1

f_o	f_a	$f_o - f_a$	$(f_o - f_a)^2$	$(f_o - f_a)^2 / f_a$
15	25	–10	100	4
30	20	10	100	5
5	5	0	0	0
35	25	10	100	4
10	20	–10	100	5
5	5	0	0	0
100	100	0	–	18 = χ^2

De notat că suma frecvenţelor observate este egală cu suma frecvenţelor aşteptate şi că suma diferenţelor $f_o - f_a$ este egală cu 0. Aceste relaţii pot fi folosite la verificarea calculelor pentru χ^2 (obţinut).

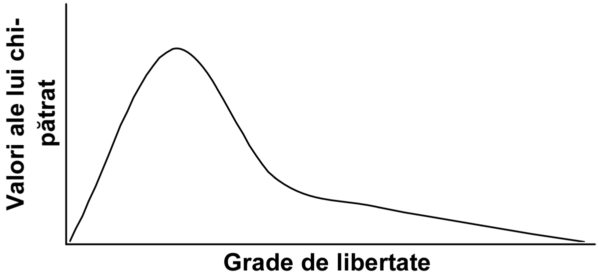
Distribuţia de eşantionare folosită în acest test este distribuţia χ^2. Ca şi în cazul distribuţiei *t*–Student, este vorba despre o familie de distribuţii χ^2, fiecare fiind o funcţie de un anumit număr de grade de libertate. În cazul testului chi–pătrat pentru independenţă, numărul de grade de libertate se calculează cu ajutorul următoarei formule:

Formula 10.3. $gl = (r - 1)(c - 1)$

în care r = numărul de rânduri din tabelul contingenţelor;
c = numărul de coloane din tabelul contingenţelor.

Un tabel cu trei rânduri şi două coloane (un tabel 3 × 2) are (3 – 1)(2 – 1) = 2 grade de libertate[42]. Spre deosebire de distribuția *t*–Student, care este simetrică, distribuția χ^2 prezintă, ca şi distribuția *F*, o asimetrie pozitivă, după cum se ilustrează în figura 10.1.

Figura 10.1. Un exemplu de curbă χ^2



Valorile pentru χ^2 (critic) marchează începuturile zonelor critice şi sunt date în **tabelul valorilor critice ale distribuției χ^2** (Anexa E). Acest tabel este similar cu tabelul distribuției *t*–Student, având nivelele α dispuse pe primul rând şi gradele de libertate pe prima coloană din stânga. Regula de decizie este:

se respinge H_0, dacă χ^2 (obținut) > χ^2 (critic)

Întrucât în exemplu nostru *gl* = 2, dacă stabilim α = 0,05, scorul χ^2 (critic) este 5,991. Deoarece χ^2 (obținut) cade în zona critică (18,00 > 5,991), se poate respinge ipoteza de nul şi se poate conchide că variabilele respective nu sunt reciproc independente: sexul influențează dominanța funcțional–operativă a mâinilor.

În termenii modelului în patru paşi, testul decurge după cum urmează:

[42] Un tabel 3 × 2 are două grade de libertate deoarece, o dată ce frecvențele din două celule au fost determinate, frecvențele din celelalte celule sunt fixate, i.e. nu mai sunt libere să varieze.

Pasul 1. Enunțarea ipotezelor

H_0: Variabilele *sex* şi *dominanța funcțional–operativă a mâinilor* sunt reciproc independente.

H_a: Variabilele *sex* şi *dominanța funcțional–operativă a mâinilor* sunt reciproc dependente.

Pasul 2. Selectarea distribuției de eşantionare şi stabilirea zonei critice

Distribuția de eşantionare = Distribuția χ^2

$\alpha = 0{,}05$

$gl = 2$

χ^2 (critic) = 5,991

Pasul 3. Calcularea statisticii testului. După cum am văzut,

$$\chi^2 = \sum \frac{(f_o - f_a)^2}{f_a} = 18$$

Pasul 4. Luarea deciziei

Întrucât χ^2 (obținut) cade în zona critică (18,00 > 5,991), se poate respinge ipoteza de nul şi se poate conchide că variabilele respective nu sunt independente: sexul influențează dominanța funcțional–operativă a mâinilor (la un nivel de încredere de 95%).

10.1.2. TESTUL CHI–PĂTRAT PENTRU CONCORDANȚĂ

Testul chi–pătrat poate fi folosit şi pentru verificarea concordanței dintre frecvențele observate şi frecvențele aşteptate (teoretice) ale unei singure variabile. Astfel, dacă χ^2 (obținut) > χ^2 (critic) pentru numărul corespunzător de grade de libertate şi un nivel α dat, atunci diferențele dintre frecvențele observate şi cele aşteptate pot fi atribuite întâmplării, concordanța dintre cele două tipuri de frecvențe fiind apreciată drept bună. În caz contrar, diferențele dintre frecvențele observate şi cele aşteptate pot fi considerate prea mari pentru a putea fi atribuite întâmplării sau, altfel spus, aceste diferențe sunt statistic semnificative.

Pentru ilustrare, să presupunem că un cercetător opinează că distribuția populației după ocupație într-o anumită zonă geografică este aproximativ următoarea:

20% țărani;
30% muncitori industriali;
30% funcționari;
15% mici întreprinzători;
5% manageri industriali.

Cercetătorul alcătuieşte un eşantion aleatoriu de 864 de persoane ocupate din zona respectivă şi le clasifică în categoriile menționate. Frecvențele observate pentru aceste categorii sunt următoarele:

145 țărani;
310 muncitori industriali;
305 funcționari;
78 mici întreprinzători;
26 manageri industriali.

Cercetătorul doreşte să ştie dacă rezultatele obținute pe acest eşantion confirmă distribuția presupusă a populației sau, altfel spus, dacă diferențele dintre frecvențele observate şi cele presupuse sunt sau nu statistic semnificative. Calcularea statisticii testului se face cu ajutorul formulei 10.2:

$$\chi^2 = \sum \frac{(f_o - f_a)^2}{f_a}$$

Pentru a afla **frecvența aşteptată** pentru fiecare categorie a variabilei considerate, folosim următoarea formulă:

Formula 10.4. $f_a = np$

în care n = numărul total de cazuri din eşantion;
p = proporția presupusă de cazuri din categoria respectivă.

De pildă, pentru țărani, $f_a = np_1 = 0{,}20 \cdot 864 = 172{,}80$.

Calculele pentru exemplul nostru sunt ilustrate în tabelul 10.3.

Tabelul 10.3. Calculul χ^2 pentru datele privind ocupația

Ocupația	f_o	f_a	$f_o - f_a$	$(f_o - f_a)^2$	$(f_o - f_a)^2 / f_a$	R
Țăran	145	172,80	–27,80	772,84	4,47	–2,12
Muncitor industrial	310	259,20	50,80	2 580,64	9,96	3,16
Funcționar	305	259,20	45,80	2 097,64	8,09	2,84
Mic întreprin-zător	78	129,60	–51,60	2 662,56	20,54	–4,53
Manager industrial	26	43,20	–17,20	295,84	6,85	–2,63
TOTAL	864,00	864,00	0	–	49,91 = χ^2	

De notat că frecvențele aşteptate sunt exact acele frecvențe pe care le-am întâlni dacă proporțiile cazurilor din eşantion ar fi aceleaşi cu proporțiile cazurilor pentru populație.

În cazul testului chi–pătrat pentru concordanță, numărul de grade de libertate se calculează cu ajutorul următoarei formule:

Formula 10.5. $gl = k - 1$

în care k = numărul de categorii ale variabilei de interes.

Întrucât în exemplul nostru sunt considerate cinci categorii ale variabilei *ocupație*, avem patru grade de libertate[43]. Pentru $\alpha = 0{,}05$ şi $gl = 4$, χ^2 (critic) = 9,488.

Testul formal este următorul:

Pasul 1. Enunțarea ipotezelor

H_0: Nu există nici o diferență între proporțiile din eşantion şi cele pentru populație

H_a: Proporțiile din eşantion diferă de cele pentru populație

[43] Aceasta înseamnă că, o dată ce frecvențele a oricare patru categorii sunt determinate, frecvența categoriei rămase este fixată.

Pasul 2. Selectarea distribuției de eşantionare şi stabilirea zonei critice

Distribuția de eşantionare = Distribuția χ^2

$\alpha = 0{,}05$

$gl = 4$

χ^2 (critic) = 9,488

Pasul 3. Calcularea statisticii testului. După cum am văzut,

$$\chi^2 = \sum \frac{(f_o - f_a)^2}{f_a} = 49{,}91$$

Pasul 4. Luarea deciziei

Întrucât χ^2 (obținut) cade în zona critică (49,91 > 9,448), se poate respinge ipoteza de nul. Diferențele dintre eşantion şi populație sunt prea mari pentru a putea fi atribuite întâmplării (la un nivel de încredere de 95%).

De notat că, deşi aici valoarea pentru χ^2 (obținut) este statistic semnificativă, această valoare este calculată ținând cont de toate categoriile, astfel că nu putem spune care categorie are cea mai mare contribuție la semnificația statistică. Atunci când avem χ^2 (obținut) > χ^2 (critic), pentru a afla care categorie are cea mai mare contribuție la semnificația statistică, se calculează **reziduul standard** pentru fiecare categorie cu ajutorul următoarei formule:

Formula 10.6. $$R = \frac{f_o - f_a}{\sqrt{f_a}}$$

Valorile reziduurilor standard pentru fiecare categorie din exemplul de mai sus se găsesc în tabelul 10.3. Atunci când valoarea absolută (modulul) reziduului standard pentru o categorie este mai mare decât 2,00, se poate conchide că acea categorie are o contribuție majoră la valoarea semnificativă a lui χ^2 (obținut). În exemplul de mai sus, toate reziduurile standard în valoare absolută sunt mai mari decât 2,00. Prin urmare, toate

categoriile contribuie major la valoarea semnificativă a lui χ^2 (obţinut), ceea ce înseamnă că *întreaga* distribuţie din eşantion nu concordă cu distribuţia presupusă de cercetător.

10.2. TESTUL McNEMAR

Testul McNemar este un test nonparametric pentru semnificaţia schimbării. Acest test utilizează distribuţia χ^2 şi este aplicabil pentru variabile de nivel nominal, în cazul a două eşantioane dependente.

Să presupunem că am alcătuit un eşantion aleatoriu de 38 de femei salariate şi am solicitat în două momente diferite răspunsul la întrebarea „Credeţi că organizaţiile feministe vă apără interesele?“ Întrebarea a fost pusă înainte şi după ce femeile din eşantion au citit o serie de documente despre astfel de organizaţii. Datele obţinute sunt prezentate în următorul tabel 2 × 2:

Tabelul 10.4. Date pentru calculul χ^2 în cazul a două eşantioane dependente pentru opinia despre organizaţiile feministe

		Înainte de lectura documentelor		
		Da	Nu	
După lectura documentelor	Nu	14 **A**	**B** 6	
	Da	16 **C**	**D** 2	
				38

Este important să remarcăm ordinea intrării datelor în acest tabel. Astfel, celulele *A* şi *D* trebuie să fie cele care indică schimbarea răspunsurilor de la un moment la altul — de la *Da* la *Nu* (*A*) şi, respectiv, de la *Nu* la *Da* (*D*) —, iar celulele *B* şi *C* trebuie să fie cele care indică absenţa

schimbării răspunsurilor de la un moment la altul. Întrucât în testul McNemar este vorba despre tabele 2 × 2, $gl = 1$.

În acest test ne interesează doar celulele care reflectă schimbarea opiniei despre apărarea intereselor femeilor salariate de către organizațiile feministe, i.e. celulele *A* şi *D*. Ipoteza de nul pentru testul McNemar enunță că, în cazul populației de referință, numărul de schimbări într-o direcție este egal cu numărul de schimbări în cealaltă direcție. Aceasta înseamnă că, presupunând că ipoteza de nul este adevărată, frecvența aşteptată în celula *A* va fi egală cu frecvența aşteptată în celula *D*. Ipoteza alternativă enunță că numărul de schimbări într-o direcție este diferit de numărul de schimbări în cealaltă direcție.

Testul statistic este testul χ^2 şi se poate folosi formula 10.2 pentru calcularea valorii lui χ^2 (obținut), dar formula va fi aplicată doar celulelor *A* şi *D*. Întrucât se presupune că frecvențele aşteptate din aceste două celule sunt egale, valoarea aşteptată în fiecare dintre aceste două celule este egală cu $(A + D)/2$. Astfel, formula de calcul a valorii χ^2 (obținut) pentru testul McNemar se simplifică după cum urmează:

Formula 10.6.
$$\chi^2 = \frac{(A-D)^2}{A+D}$$

Pentru exemplul de mai sus, testul formal este următorul:

Pasul 1. Enunțarea ipotezelor

H_0: Există un număr egal de schimbări în ambele direcții

H_a: Numărul de schimbări într-o direcție este semnificativ diferit față de numărul de schimbări în cealaltă direcție

Pasul 2. Selectarea distribuției de eşantionare şi stabilirea zonei critice

Distribuția de eşantionare = Distribuția χ^2

$\alpha = 0,05$

$gl = 1$

χ^2 (critic) = 3,841

Pasul 3. Calcularea statisticii testului

$$\chi^2 = \frac{(A-D)^2}{A+D} = \frac{(14-2)^2}{14+2} = \frac{12^2}{16} = \frac{144}{16} = 9{,}00$$

Pasul 4. Luarea deciziei

Întrucât χ^2 (obținut) cade în zona critică (9,00 > 3,841), se poate respinge ipoteza de nul. Există o diferență statistic semnificativă între numărul de schimbări într-o direcție şi numărul de schimbări în cealaltă direcție (o diferență care nu poate fi pusă pe seama întâmplării). Din tabelul 10.4 rezultă că mai multe femei salariate şi-au schimbat opinia de la *Da* la *Nu* decât de la *Nu* la *Da*, iar testul arată că această diferență este statistic semnificativă.

10.3. TESTUL MANN–WHITNEY *U*

Testul Mann–Whitney *U* este asemănător în multe privințe cu testele parametrice pentru diferența dintre mediile aritmetice a două eşantioane independente. În ambele cazuri, comparăm două eşantioane independente pentru a face inferențe despre diferențele dintre cele două populații de referință şi comparăm rezultatul calculării testului statistic cu distribuția de eşantionare a rezultatelor tuturor eşantioanelor posibile. Pe de altă parte, acest test se bazează pe ordonarea scorurilor eşantioanelor, astfel că este aplicabil la date de nivel ordinal.

Ca şi alte teste statistice aplicabile la date de nivel ordinal, testul Mann-Whitney *U* foloseşte atribuirea de ranguri. A atribui **ranguri** unei mulțimi de scoruri de nivel ordinal înseamnă a pune în corespondență respectiva mulțime de scoruri cu numere naturale din mulțimea {1, 2, …} în aşa fel încât succesiunea scorurilor să se păstreze. Să presupunem, de pildă, că într-un inventar de personalitate li se cere subiecților să evalueze o serie de propoziții după următoarea scală: *Acord puternic*, *Acord*, *Nedecis*, *Dezacord*, *Dezacord puternic*. Putem atribui ranguri acestor scoruri după cum urmează:

Acord puternic	*Acord*	*Nedecis*	*Dezacord*	*Dezacord puternic*
5	4	3	2	1

Întrucât singura semnificație a atribuirii de ranguri este reflectarea ierarhiei scorurilor, o altă modalitate de a atribui ranguri în acest exemplu este următoarea:

Acord puternic	*Acord*	*Nedecis*	*Dezacord*	*Dezacord puternic*
9	7	5	3	1

Cu toate acestea, se obişnuieşte ca diferența dintre două ranguri imediat succesive să fie egală cu unitatea.

Testul Mann–Whitney *U* comportă două variante, în funcție de dimensiunile eşantioanelor. Prezentăm mai întâi testul pentru eşantioane mici ($n_1 \leq 20$ şi $n_2 \leq 20$).

Să presupunem că ne preocupă diferența pe sexe privind nivelul de satisfacție în raport cu serviciile sociale oferite într-un campus universitar. Pentru aceasta, selectăm aleatoriu două eşantioane de studenți, băieți şi fete, cu $n_1 = 10$ şi $n_2 = 10$, şi administrăm o scală în care un scor înalt indică un nivel înalt de satisfacție. Scorurile obținute sunt prezentate în tabelul 10.5.

Tabelul 10.5. Scoruri ale satisfacției exprimate în raport cu serviciile sociale oferite într-un campus universitar

Eşantionul 1 (studente)			Eşantionul 2 (studenți)		
Cazul	Scorul	Rangul	Cazul	Scorul	Rangul
1	5	1	11	10	3
2	9	2	12	20	8
3	14	4	13	24	9
4	15	5	14	26	11
5	17	6	15	27	12
6	19	7	16	28	13
7	25	10	17	30	14,5
8	30	14,5	18	32	16
9	35	17	19	40	18
10	42	19	20	45	20
		$\Sigma R_1 = 85{,}5$			$\Sigma R_2 = 124{,}5$

Mai întâi, aranjăm scorurile din fiecare eşantion în ordine crescătoare (sau descrescătoare). Apoi, considerăm scorurile combinate ale celor două eşantioane ca şi cum ar fi vorba despre un singur eşantion şi atribuim ranguri scorurilor combinate, de la cel mai mic la cel mai mare scor. Astfel, atribuim rangul 1 celui mai mic scor (5), rangul 2 scorului imediat următor (9) ş.a.m.d. până la cel mai mare scor (45). Dacă întâlnim două sau mai multe scoruri identice (două sau mai multe cazuri cu acelaşi scor), procedăm după cum urmează:

- considerăm rangurile pe care aceste scoruri le-ar fi avut dacă ar fi fost diferite şi imediat succesive;
- calculăm media aritmetică a acestor ranguri;
- atribuim fiecărui scor rangul mediu astfel obţinut.

În exemplul nostru, cazurile 8 şi 17 au acelaşi scor, 30. Scorului cazului 8 i-am fi atribuit rangul 14, iar scorului cazului 17 i-am fi atribuit scorul 15. Prin urmare, atribuim ambelor scoruri rangul 14,5 ((14 + 15) / 2), iar scorului imediat următor în ordine crescătoare (32) îi atribuim rangul 16 (rangul pe care l-ar fi avut acest scor, dacă cele două scoruri 30 ar fi fost diferite). După această operaţie, calculăm suma rangurilor pentru fiecare eşantion. Intuitiv vorbind, dacă cele două eşantioane reprezintă populaţii care nu diferă semnificativ între ele sub aspectul variabilei măsurate, atunci cele două sume sunt apropiate ca valoare. Dacă însă cele două eşantioane reprezintă populaţii care diferă semnificativ între ele sub aspectul variabilei măsurate, atunci cele două sume sunt mult diferite.

Calcularea statisticii testului presupune mai întâi calcularea a două mărimi statistice, U_1 şi U_2, cu ajutorul următoarelor formule:

Formula 10.7.
$$U_1 = n_1 n_2 + \frac{n_1(n_1 + 1)}{2} - \Sigma R_1$$

Formula 10.8.
$$U_1 = n_1 n_2 + \frac{n_2(n_2 + 1)}{2} - \Sigma R_2$$

În aceste formule, n_1 şi n_2 sunt, respectiv, dimensiunile celor două eşantioane, iar ΣR_1 şi ΣR_2 sunt, respectiv, sumele rangurilor pentru cele două eşantioane.

O dată calculate cele două mărimi, U_1 şi U_2, se ia drept valoare pentru U (obţinut) *cea mai mică* dintre valorile U_1, U_2: U (obţinut) = min (U_1, U_2).

Pentru a stabili valoarea critică din distribuţia de eşantionare a valorilor U, folosim **tabelul valorilor critice pentru testul Mann–Whitney *U*** (Anexa F). Pe primul rând şi pe prima coloană din stânga ale acestui tabel sunt trecute dimensiunile a două eşantioane. Nivelurile α sunt date pentru un test unilateral (direcţional). În cazul unui test bilateral (non-direcţional), nivelul α dat se localizează înmulţind cu doi valoarea lui α. Valoarea critică, U (critic), se află la intersecţia liniei corespunzătoare dimensiunii unui eşantion cu coloana corespunzătoare dimensiunii celuilalt eşantion la nivelul α ales. În exemplul nostru, având $n_1 = 10$ şi $n_2 = 10$, pentru $\alpha = 0,05$ (test non-direcţional), U (critic) = 23.

Ipoteza de nul este, ca întotdeauna, un enunţ de tipul „nici o diferenţă“, dar este formulată în termeni mai generali decât în cazul testelor parametrice: nu există nici o diferenţă în privinţa scorurilor populaţiilor respective sub aspectul variabilei de interes. În exemplul nostru, ipoteza de nul enunţă că nu există nici o diferenţă între studente şi studenţi sub aspectul satisfacţiei exprimate în raport cu serviciile sociale oferite în campus. De regulă, ipoteza alternativă enunţă că populaţiile din care au fost selectate eşantioanele sunt diferite sub aspectul variabilei de interes. Această formă a ipotezei de nul conduce la un test nondirecţional. Desigur, putem apela la un test direcţional, atunci când sensul diferenţei poate fi prezis, i.e. atunci când putem prezice că scorurile unei populaţii sunt mai mari sau mai mici decât scorurile celeilalte populaţii. Într-un test nondirecţional, regula de decizie este următoarea:

se respinge H_0, dacă U (obţinut) < U (critic).

De remarcat că ipoteza de nul se respinge dacă valoarea obţinută este *mai mică* decât cea critică. Această regulă diferă de regulile de decizie din cele mai multe teste de semnificaţie, în care ipoteza de nul este respinsă dacă valoarea obţinută este *mai mare* decât cea critică.

Dacă se poate prezice că scorurile populaţiei 1 sunt mai mari decât cele ale populaţiei 2, regula de decizie este

se respinge H_0, dacă U_1 < U (critic),

iar dacă se poate prezice că scorurile populației 1 sunt mai mici decât cele ale populației 2, regula de decizie este

se respinge H_0, dacă $U_2 < U$ (critic).

Testul formal decurge după cum urmează:

Pasul 1. Enunțarea ipotezelor

H_0: Satisfacția$_1$ = Satisfacția$_2$

H_a: Satisfacția$_1$ ≠ Satisfacția$_2$

Pasul 2. Selectarea distribuției de eşantionare şi stabilirea zonei critice

Distribuția de eşantionare = Distribuția U

$\alpha = 0{,}05$ (test nedirecțional)

U (critic) = 23

Pasul 3. Calcularea statisticii testului

$$U_1 = n_1 n_2 + \frac{n_1(n_1+1)}{2} - \Sigma R_1 = (10 \cdot 10) + \frac{10 \cdot 11}{2} - 85{,}5 = 100 + 55 - 85{,}5 = 69{,}5$$

$$U_1 = n_1 n_2 + \frac{n_2(n_2+1)}{2} - \Sigma R_2 = (10 \cdot 10) + \frac{10 \cdot 11}{2} - 124{,}5 = 100 + 55 - 124{,}5 = 30{,}5$$

$$U = \min(U_1, U_2) = 30{,}5$$

Pasul 4. Luarea deciziei

Întrucât U (obținut) > U (critic) (30,5 > 23), nu putem respinge ipoteza de nul. Studentele nu diferă semnificativ de studenți sub aspectul nivelului de satisfacție în raport cu serviciile sociale oferite în campus (la un nivel de încredere de 95%).

Atunci când $n_1 > 20$ şi $n_2 > 20$, distribuția de eşantionare pentru U se apropie de distribuția normală, astfel încât putem folosi tabelul scorurilor Z pentru a stabili zona critică. Luând drept cadru modelul în patru paşi, în pasul 2, distribuția de eşantionare este distribuția Z, zona critică fiind cea marcată de Z (critic), în funcție de nivelul α ales şi de tipul de test (unilateral sau bilateral). Formula pentru Z (obținut) este următoarea:

Formula 10.9. $$Z = \frac{U - \mu_U}{\sigma_U}$$

în care μ_U = media aritmetică a distribuției de eşantionare a valorilor U pentru toate eşantioanele posibile;

σ_U = abaterea standard a distribuției de eşantionare a valorilor U pentru toate eşantioanele posibile.

Valorile pentru μ_U şi σ_U se calculează cu ajutorul următoarelor formule:

Formula 10.10. $$\mu_U = \frac{n_1 n_2}{2}$$

Formula 10.11. $$\sigma_U = \sqrt{\frac{n_1 n_2 (n_1 + n_2 + 1)}{12}}$$

Prin urmare, în pasul 3 lucrăm cu următoarea formulă:

Formula 10.12. $$Z = \frac{U - \frac{n_1 n_2}{2}}{\sqrt{\frac{n_1 n_2 (n_1 + n_2 + 1)}{12}}}$$

În fine, în pasul 4 se utilizează procedura de decizie cunoscută pentru testul Z.

10.4. TESTUL MEDIANEI

Testul medianei este un test nonparametric pentru egalitatea a două mediane. Acest test utilizează distribuția χ^2 şi este aplicabil în cazul a două eşantioane independente, pentru variabile măsurate la nivel ordinal.

Să presupunem că ne interesează atitudinea femeilor salariate şi a celor casnice față de mişcările feministe. Alcătuim un eşantion de 10

femei salariate şi un eşantion de 10 femei casnice şi administrăm un chestionar adecvat. Scorurile obținute sunt prezentate în tabelul 10.6.

Tabelul 10.6. Atitudinea față de mişcările feministe a femeilor salariate şi a casnicelor

Eşantionul 1 (salariate)			Eşantionul 2 (casnice)		
Cazul	Scorul	Rangul	Cazul	Scorul	Rangul
1	19	3	11	16	1
2	22	5	12	18	2
3	28	8	13	21	4
4	32	11	14	26	6
5	34	13	15	27	7
6	37	14	16	29	9
7	40	17	17	31	10
8	42	18	18	33	12
9	43	19	19	38	15
10	46	20	20	39	16

Mai întâi, aranjăm scorurile din fiecare eşantion în ordine crescătoare (sau descrescătoare). Apoi, considerând scorurile combinate ale celor două eşantioane ca şi cum ar fi vorba despre un singur eşantion şi aflăm **mediana** scorurilor combinate. Pentru a înlesni aflarea medianei scorurilor combinate este recomandabil să acordăm ranguri scorurilor. Întrucât avem un număr par de cazuri (20), mediana va fi media aritmetică a scorurilor celor două cazuri de mijloc, 31 şi 32:

$$\widetilde{X} = \frac{31 + 32}{2} = 31{,}5$$

Cu ajutorul unui tabel 2 × 2, prezentăm pentru fiecare eşantion numărul de scoruri aflate deasupra şi sub mediana scorurilor combinate:

	Eşantion 1	Eşantion 2	
Deasupra medianei	7 **A**	3 ***B***	10
Sub mediană	3 **C**	7 **D**	10
	10	10	20

Fiind un tabel 2 × 2, numărul de grade de libertate este egal cu 1.

Ipoteza de nul pentru testul medianei enunță că populațiile din care au fost selectate cele două eşantioane au aceeaşi mediană ($\tilde{\mu}_1 = \tilde{\mu}_2$), iar ipoteza alternativă enunță că medianele celor două populații sunt diferite ($\tilde{\mu}_1 \neq \tilde{\mu}_2$).

În general, formula de calcul a valorii χ^2 (obținut) pentru testul medianei este formula 10.2. Pentru un tabel 2 × 2, notând celulele ca mai sus, formula de calcul poate fi simplificată, după cum urmează:

Formula 10.13.
$$\chi^2 = \frac{n(AD - BC)^2}{(A + B)(C + D)(A + C)(B + D)}$$

În termenii modelului în patru paşi, testul decurge după cum urmează:

Pasul 1. Enunțarea ipotezelor

H_0: $\tilde{\mu}_1 = \tilde{\mu}_2$

H_a: $\tilde{\mu}_1 \neq \tilde{\mu}_2$

Pasul 2. Selectarea distribuției de eşantionare şi stabilirea zonei critice

Distribuția de eşantionare = Distribuția χ^2

$\alpha = 0{,}05$

$gl = 1$

χ^2 (critic) = 3,841

Pasul 3. Calcularea statisticii testului

$$\chi^2 = \frac{n(AD - BC)^2}{(A+B)(C+D)(A+C)(B+D)} = \frac{20(7\cdot 7 - 3\cdot 3)^2}{10\cdot 10\cdot 10\cdot 10} = 3{,}20$$

Pasul 4. Luarea deciziei

Întrucât χ^2 (obținut) nu cade în zona critică (3,20 < 3,841), nu se poate respinge ipoteza de nul, ceea ce înseamnă că nu există nici o diferență statistic semnificativă între femeile salariate şi cele casnice în privința atitudinii față de mişcările feministe (la un nivel de încredere de 95%).

10.5. TESTUL ITERAȚIILOR

Testul iterațiilor este similar ca logică şi formă cu Testul Mann-Whitney *U*. Ipoteza de nul enunță că nu există o diferență semnificativă între populațiile de referință sub aspectul variabilei de interes. Pentru a aplica acest test, se combină scorurile celor două eşantioane, după care aceste scoruri se ordonează crescător (sau descrescător) ca şi cum ar fi vorba despre un singur eşantion. Dacă ipoteza de nul este adevărată, atunci scorurile vor fi foarte amestecate şi vom avea multe iterații. O **iterație** (repetare) este orice succesiune de R elemente de acelaşi fel, cu $R \geq 1$. Dacă ipoteza de nul este falsă, populațiile fiind diferite sub aspectul variabilei de interes, atunci vor fi foarte puține iterații.

Pentru a ilustra noțiunea de iterație, să considerăm datele din tabelul 10.5 şi să folosim **F** pentru studente şi **B** pentru studenți. Obținem următoarele iterații:

F F	**B**	**F F F F**	**B B**	**F**	**B B B B**	**F**	**B**	**F**	**B**	**F**	**B**
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

Cele două litere **F** din extrema stângă reprezintă două studente care au cele mai mici scoruri din ambele eşantioane; următoarea literă, **B**, reprezintă un student cu scorul următor în ordine crescătoare ş.a.m.d. De notat că nici o iterație alcătuită din elemente de un anumit tip nu se învecinează cu o iterație alcătuită din elemente de acelaşi tip. Dacă, de pildă, am con-

sidera primul element al iterației 3 drept o iterație distinctă, atunci aceasta s-ar învecina la dreapta cu o iterație alcătuită din elemente de acelaşi tip, **F**.

Diferența dintre eşantioane, şi deci dintre populații, este cu atât mai semnificativă cu cât numărul de iterații este mai mic. Cel mai mic număr de iterații posibil este, desigur, 2. În exemplul de mai sus, dacă toți studenții ar exprima o satisfacție mai mare decât studentele în raport cu serviciile sociale din campus, am fi obținut următoarele două iterații:

B B B B B B B B B B   **F F F F F F F F F F**
1   2

Evident, numărul maxim posibil de iterații este egal cu numărul de cazuri din cele două eşantioane.

Este important de reținut că în aplicarea acestui test, cazurile care nu fac parte din acelaşi eşantion şi au scoruri identice pot crea probleme serioase, deoarece numărul de iterații poate fi mult afectat de felul în care sunt aranjate cazurile cu scoruri identice. Dacă întâlnim multe cazuri cu scoruri identice în eşantioane diferite este recomandabil să folosim alt test de semnificație.

Distribuția de eşantionare pentru iterații aproximează normalitatea. Media aritmetică a acestei distribuții (μ_R) şi abaterea sa standard (σ_R) se calculează cu ajutorul următoarelor formule:

Formula 10.14.
$$\mu_R = \frac{2n_1n_2}{n_1+n_2}+1$$

Formula 10.15.
$$\sigma_R = \sqrt{\frac{2n_1n_2(2n_1n_2-n_1-n_2)}{(n_1+n_2)^2(n_1+n_2-1)}}$$

Statistica testului iterațiilor, *Z* (obținut), se calculează cu următoarea formulă:

Formula 10.16.
$$Z = \frac{R-\mu_R}{\sigma_R}$$

în care *R* = numărul de iterații.

Pentru a ilustra aplicarea acestui test, să presupunem că două eşantioane aleatorii alcătuite, respectiv, din bărbați şi femei au fost chestionate cu privire la atitudinea față de politică şi politicieni. Scorurile sunt prezentate în următorul tabel:

Tabelul 10.7. Atitudinea față de politică şi politicieni pentru două eşantioane de bărbați şi, respectiv, femei

Bărbați		Femei	
Cazul	Scorul	Cazul	Scorul
1	1	21	0
2	1	22	0
3	2	23	4
4	2	24	4
5	3	25	6
6	5	26	6
7	5	27	8
8	7	28	12
9	9	29	12
10	10	30	13
11	10	31	14
12	15	32	16
13	17	33	16
14	17	34	21
15	18	35	21
16	19	36	21
17	20	37	25
18	22	38	26
19	22	39	27
20	23	40	27

Să observăm că aici nu există scoruri identice în eşantioane diferite (scorurile identice în acelaşi eşantion nu au nici o influență asupra numărului de iterații). Folosind tot literele **B** şi **F**, obținem următoarele iterații:

F F	**B B B B B**	**F F**	**B B**	**F F**	**B**	**F**	**B B B**	**F F F F**	**B**	**F F**
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11

B B B B	**F F F**	**B B B**	**F F F F**
12	13	14	15

În aceste date se află 15 iterații și putem acum să aplicăm testul formal pentru semnificație.

Pasul 1. Enunțarea ipotezelor

H_0: Atitudinea$_1$ = Atitudinea$_2$

H_a: Atitudinea$_1$ ≠ Atitudinea$_2$

Pasul 2. Selectarea distribuției de eșantionare și stabilirea zonei critice

Distribuția de eșantionare = Distribuția Z

$\alpha = 0{,}05$

Z (critic) = ±1,96

Pasul 3. Calcularea statisticii testului

$$\mu_R = \frac{2n_1n_2}{n_1+n_2} + 1 = \frac{2\cdot 20\cdot 20}{20+20} + 1 = 21$$

$$\sigma_R = \sqrt{\frac{2n_1n_2(2n_1n_2 - n_1 - n_2)}{(n_1+n_2)^2(n_1+n_2-1)}} = \sqrt{\frac{2\cdot 20\cdot 20(2\cdot 20\cdot 20 - 20\cdot 20}{(20+20)^2(20+20-1)}} = 3{,}12$$

$$Z = \frac{R - \mu_R}{\sigma_R} = \frac{15-21}{3{,}12} = -1{,}92$$

Pasul 4. Luarea deciziei

Întrucât Z (obținut) > –Z (critic) (–1,92 > –1,96), rezultatul statisticii testului nu cade în zona critică. Prin urmare, nu putem respinge ipoteza de nul. În exemplul de mai sus, bărbații și femeile nu diferă semnificativ în privința atitudinii față de politică și politicieni.

10.6. TESTUL WILCOXON *T*

Testul Wilcoxon *T* este un test pentru semnificaţia diferenţei dintre două eşantioane dependente, aplicabil pentru date de nivel ordinal. Astfel, testul este folosit în mod obişnuit atunci când selectarea cazurilor pentru un eşantion influenţează selectarea cazurilor pentru celălalt eşantion, având ca rezultat considerarea unor perechi de cazuri, unul dintr-un eşantion, altul din celălalt eşantion, sau în situaţii în care aceiaşi subiecţi sunt testaţi înainte şi după un anumit tratament.

Ca şi Testul Mann–Whitney *U*, testul Wilcoxon *T* comportă două variante, în funcţie de dimensiunile eşantioanelor. Prezentăm mai întâi testul pentru eşantioane mici ($n_1 \leq 25$ şi $n_2 \leq 25$).

Pentru ilustrare, să presupunem că ne interesează comportamentul agresiv al adolescenţilor cu dificultăţi de învăţare, înainte şi după o serie de şedinţe de consiliere. Pentru aceasta, am selectat un eşantion aleatoriu de 12 adolescenţi cu dificultăţi de învăţare. Măsura comportamentului agresiv reprezintă media aprecierilor oferite de cinci consilieri. Aprecierile au fost făcute înainte şi după tratament. Problema pe care ne-o punem este următoarea: comportamentul agresiv al adolescenţilor cu dificultăţi de învăţare poate fi diminuat prin astfel de şedinţe de consiliere? După cum se poate constata, ca şi în cazul altor teste nonparametrice, ipoteza de nul şi ipoteza alternativă în cazul testului Wilcoxon *T* se enunţă în termeni generali.

Datele obţinute sunt prezentate în tabelul 10.8, în care un scor înalt indică un comportament agresiv:

Tabelul 10.8. Scoruri ale comportamentului agresiv pentru adolescenți cu dificultăți de învățare

Cazul	Scorul pretratament	Scorul posttratament	Scorul diferență	Rangul diferenței	Ranguri cu cel mai puțin frecvent semn
1	36	21	15	11	
2	23	24	–1	–1	1
3	48	36	12	10	
4	54	30	24	12	
5	40	32	8	7	
6	32	35	–3	–3	3
7	50	43	7	6	
8	44	40	4	4	
9	36	30	6	5	
10	29	27	2	2	
11	33	22	11	9	
12	45	36	9	8	
					T (obținut) = 4

Pentru calcularea statisticii testului se procedează după cum urmează:

1. Pentru fiecare caz, se calculează diferența dintre scorul pretratament şi scorul posttratament; rezultatul scăderii se numeşte **scor diferență**.
2. Se atribuie ranguri valorilor absolute ale scorurilor diferență (modulelor scorurilor diferență), începând cu cea mai mică valoare absolută; rangurile scorurilor diferență pozitive primesc semnul +, iar rangurile scorurilor diferență negative primesc semnul –.
3. Se însumează valorile absolute ale rangurilor cu semnul care are cele mai puține apariții; rezultatul însumării reprezintă valoarea pentru *T* (obținut).

Ca şi în cazul testului iterațiilor, în aplicarea testului Wilcoxon *T*, cazurile care nu fac parte din acelaşi eşantion şi au scoruri identice pot crea probleme serioase. Dacă întâlnim multe cazuri cu scoruri identice în eşantioane diferite este recomandabil să folosim alt test de semnificație.

Pentru a stabili valoarea critică din distribuția de eşantionare a valorilor T, folosim **tabelul valorilor *T* critice**, elaborat de Frank Wilcoxon (Anexa G). În acest tabel sunt date valorile T critice pentru diferite niveluri α şi diferite dimensiuni ale eşantioanelor–perechi . În exemplul de față, cu $n = 12$, pentru $\alpha = 0{,}01$ (test unilateral), T (critic) = 10.

Ipoteza de nul enunță că nu există nici o diferență în privința comportamentului agresiv al populației de adolescenți cu dificultăți de învățare, înainte şi după o serie de şedințe de consiliere. Ipoteza alternativă, în conformitate cu datele problemei, enunță că agresivitatea adolescenților cu dificultăți de învățare este diminuată după respectivele şedințe de consiliere. Această ipoteză alternativă conduce la un test unilateral stânga, în care vom respinge ipoteza de nul dacă T (obținut) < T (critic). În cazul unui test unilateral dreapta, se respinge ipoteza de nul dacă T (obținut) > T (critic). Pentru un test bilateral, se respinge ipoteza de nul dacă T (obținut) < T (critic) sau T (obținut) > T (critic).

În termenii modelului în patru paşi, testul decurge după cum urmează:

Pasul 1. Enunțarea ipotezelor

H_0: Nu există nici o diferență în privința comportamentului agresiv al populației de adolescenți cu dificultăți de învățare, înainte şi după o serie de şedințe de consiliere.

H_a: Comportamentul populației de adolescenți cu dificultăți de învățare este mai puțin agresiv după şedințele de consiliere.

Pasul 2. Selectarea distribuției de eşantionare şi stabilirea zonei critice

Distribuția de eşantionare = Distribuția T

$\alpha = 0{,}01$ (test unilateral stânga)

T (critic) = 10

Pasul 3. Calcularea statisticii testului

După cum am văzut în tabelul 10.8, calculăm scorurile diferență şi atribuim ranguri valorilor absolute ale acestor scoruri începând cu cea mai mică valoare absolută, păstrând semnele corespunzătoare. Rangurile

cu semnul care are cele mai puține apariții, considerate în valoare absolută, sunt 1 şi 3; prin însumarea acestor valori, găsim T (obținut) = 4.

Pasul 4. Luarea deciziei

Întrucât T (obținut) < T (critic) (4 < 10), respingem ipoteza de nul şi conchidem că agresivitatea adolescenților cu dificultăți de învățare poate fi diminuată prin şedințele de consiliere.

Atunci când $n_1 > 25$ şi $n_2 > 25$, distribuția de eşantionare pentru T se apropie de distribuția normală, astfel încât putem folosi tabelul scorurilor Z pentru a stabili zona critică. În pasul 3, după ce determinăm valoarea pentru T (obținut), folosim mai întâi următoarele formule pentru determinarea mediei aritmetice a distribuției de eşantionare a valorilor T (μ_T) şi, respectiv, a abaterii standard a acestei distribuții (σ_T):

Formula 10.17. $$\mu_T = \frac{n(n+1)}{4}$$

Formula 10.18. $$\sigma_T = \sqrt{\frac{n(n+1)(2n+1)}{24}}$$

În aceste formule, n reprezintă numărul de cazuri din fiecare eşantion sau, altfel spus, numărul de perechi de cazuri alcătuite din cele două eşantioane. Z (obținut) se calculează cu următoarea formulă:

Formula 10.19. $$Z = \frac{T - \mu_T}{\sigma_T}$$

Procedura de decizie este cea uzuală pentru testul Z.

10.7. TESTUL KRUSKAL–WALLIS *H*

Testul Kruskal–Wallis *H* este analogul nonparametric al testului ANOVA pentru o variabilă independentă şi este aplicabil la date de nivel ordinal.

Să presupunem că ne interesează diferenţele dintre cadrele didactice din învăţământul primar, cel gimnazial şi cel liceal sub aspectul comportamentului autoritar faţă de elevi. Alcătuim eşantioane din cele trei populaţii cu, respectiv, $n_1 = 6$, $n_2 = 5$ şi $n_3 = 6$ şi administrăm subiecţilor o scală de autoritate. Datele obţinute sunt prezentate în tabelul 10.9, în care scorurile mari indică un comportament mai autoritar.

Tabelul 10.9. Comportamentul autoritar al cadrelor didactice din învăţământul primar, gimnazial şi liceal

Cadre didactice din învăţământul primar		Cadre didactice din învăţământul gimnazial		Cadre didactice din învăţământul liceal	
Scorul	Rangul	Scorul	Rangul	Scorul	Rangul
46	1	49	3	58	8
48	2	53	5	63	10
52	4	64	11	65	12
54	6	66	13	70	15
57	7	68	14	71	16
62	9			73	17
	$\Sigma R_1 = 29$		$\Sigma R_2 = 46$		$\Sigma R_3 = 78$

Considerând scorurile combinate ale celor trei eşantioane şi ordonate crescător, atribuim rangul 1 celui mai mic scor (46), rangul 2 scorului imediat următor (48) ş.a.m.d. până la cel mai mare scor (73). Dacă întâlnim două sau mai multe scoruri identice, procedăm în maniera indicată în cazul testului Mann–Whitney *U*. Calculăm apoi suma rangurilor pentru fiecare eşantion.

Ipoteza de nul pentru testul Kruskal–Wallis *H* este analogă ipotezei de nul pentru testul ANOVA unifactorial, fiind însă enunţată în termeni mai generali: nu există nici o diferenţă în privinţa scorurilor celor *k* populaţii din care au fost alcătuite eşantioanele sau, altfel spus, populaţiile din care au fost alcătuite eşantioanele sunt identice sub aspectul variabilei de interes. Ipoteza alternativă enunţă că cel puţin două dintre cele *k* populaţii diferă sub aspectul variabilei de interes.

De notat că o condiţie de aplicabilitate a acestui test este ca fiecare eşantion *j* să conţină un număr de cazuri $n_j \geq 5$.

Calcularea statisticii testului constă din aflarea valorii unei mărimi statistice, H, cu ajutorul următoarei formule:

Formula 10.21.
$$H = \left[\frac{12}{N(N+1)} \cdot \sum_{j=1}^{k} \frac{\left(\sum R_j\right)^2}{n_j} \right] - 3(N+1)$$

în care N = numărul total de cazuri din cele k eşantioane;

ΣR_j = suma rangurilor din eşantionul j, $j = 1,2, \ldots, k$;

n_j = numărul de cazuri din eşantionul j, $j = 1,2, \ldots, k$.

Distribuţia de eşantionare în testul Kruskal–Wallis H este distribuţia χ^2 cu $k - 1$ grade de libertate. Ipoteza de nul este respinsă dacă valoarea lui H este mai mare decât valoarea critică χ^2 corespunzătoare nivelului α ales şi numărului de grade de libertate.

În termenii modelului în 4 paşi, testul pentru exemplul de mai sus decurge după cum urmează:

Pasul 1. Enunţarea ipotezelor

H_0: Nu există nici o diferenţă în privinţa comportamentului autoritar faţă de elevi al cadrelor didactice de la cele trei niveluri de învăţământ.

H_a: Cel puţin două din cele trei populaţii de cadre didactice diferă sub aspectul comportamentului autoritar faţă de elevi.

Pasul 2. Selectarea distribuţiei de eşantionare şi stabilirea zonei critice

Distribuţia de eşantionare = Distribuţia χ^2

$\alpha = 0,05$

$gl = k - 1 = 3 - 1 = 2$

χ^2 (critic) = 5,991

Pasul 3. Calcularea statisticii testului

$$H = \left[\frac{12}{N(N+1)} \cdot \sum_{j=1}^{k} \frac{\left(\sum R_j\right)^2}{n_j} \right] - 3(N+1) =$$

$$= \left[\frac{12}{17(17+1)} \cdot \left(\frac{29^2}{6} + \frac{46^2}{5} + \frac{78^2}{6} \right) \right] - 3(17+1) = 7{,}86$$

Pasul 4. Luarea deciziei

Întrucât H (7,86) > χ^2 (critic) (5,991), putem respinge ipoteza de nul. Examinarea datelor indică faptul că profesorii de liceu sunt mai autoritari decât cei din învățământul gimnazial şi primar şi profesorii din învățământul gimnazial sunt mai autoritari decât cei din învățământul primar, iar testul arată că aceste diferențe sunt statistic semnificative.

GLOSAR

Celulă: intersecția unui rând cu o coloană într-un tabel al contingențelor. Celulele indică numărul de cazuri clasificate concomitent în câte două categorii ale celor două variabile.

Iterație: orice succesiune de R elemente de același fel, cu R ≥ 1.

Marginal: subtotal pentru o coloană și un rând într-un tabel al contingențelor. Marginalele indică distribuțiile de frecvențe pentru fiecare categorie a variabilei respective sau, altfel spus, distribuțiile univariate de frecvențe ale fiecărei variabile.

Tabel al contingențelor: tabel rectangular în care cazurile dintr-un eșantion sunt clasificate concomitent după categoriile a două variabile. Denumirile categoriilor unei variabile sunt folosite drept titluri de coloane, iar denumirile categoriilor celeilalte variabile sunt folosite drept titluri de rânduri.

Teste nonparametrice: teste de semnificație care nu necesită supoziții particulare despre forma distribuției populațiilor de referință, astfel că pot fi aplicate în special atunci când se lucrează cu eșantioane mici. Testele nonparametrice sunt cu deosebire utile în psihologie, întrucât pot fi aplicate pentru variabile măsurate la nivel nominal sau ordinal.

Testul chi-pătrat (χ^2): test nonparametric pentru două variabile măsurate la nivel nominal și organizate într-un tabel al contingențelor. Esența acestui test constă din compararea frecvențelor observate — frecvențele efective obținute empiric de către cercetător — cu frecvențele teoretice sau așteptate — frecvențele calculate sub presupunerea că ipoteza de nul este adevărată.

Testul iterațiilor: test non-parametric pentru două variabile măsurate la nivel ordinal.

Testul Kruskal-Wallis *H*: este analogul nonparametric al testului ANOVA unifactorial, aplicabil la date de nivel ordinal.

Testul Mann-Whitney *U*: test nonparametric pentru două variabile măsurate la nivel ordinal.

Testul McNemar: test nonparametric pentru semnificația schimbării; acest test utilizează distribuția $\chi 2$ și este aplicabil pentru variabile de nivel nominal, în cazul a două eșantioane dependente.

Testul medianei: test nonparametric pentru egalitatea a două mediane; acest test utilizează distribuția $\chi 2$ și este aplicabil în cazul a două eșantioane independente, pentru variabile măsurate la nivel ordinal.

Testul Wilcoxon *T*: test non-parametric pentru semnificația diferenței dintre două eșantioane dependente, aplicabil pentru date de nivel ordinal.

Variabile independente reciproc: două variabile sunt independente

reciproc dacă, pentru toate cazurile din eşantionul considerat, clasificarea unui caz într-o categorie a unei variabile nu are nici un efect asupra probabilității ca acel caz să fie clasificat în oricare dintre categoriile celeilalte variabile.

11

MĂRIMI ALE CORELAȚIEI

Mărimile corelației sunt mărimi statistice complementare testelor de semnificație şi permit cuantificarea importanței (tăriei) unei relații între variabile. Psihologii sunt interesați să descopere dacă există relații între variabile precum inteligența şi creativitatea, vechimea în muncă şi satisfacția față de profesia practicată, timpul afectat vizionării emisiunilor TV şi performanțele şcolare etc. Mărimile corelației sunt folosite în principal pentru înțelegerea relațiilor cauzale dintre variabile şi pentru predicția de la o variabilă la alta. Să precizăm. Deşi mărimile corelației nu pot fi folosite pentru *a dovedi* existența relațiilor cauzale, informațiile furnizate de acestea pot fi folosite ca argumente în favoarea sau împotriva existenței relațiilor cauzale. Pe de altă parte, dacă două variabile sunt corelate, atunci putem aprecia scorurile unei variabile pe baza cunoaşterii scorurilor în privința celeilalte variabile. În psihologie, o astfel de apreciere se numeşte **predicție**. O predicție este cu atât mai precisă, cu cât corelația dintre cele două variabile este mai puternică.

În cele ce urmează, vom folosi tabelele cu dublă intrare pentru a introduce noțiunea de **corelație**, vom prezenta calcularea şi interpretarea diferitelor mărimi ale corelației bivariate (corelația dintre două variabile) şi vom aborda unele aspecte ale corelației multivariate (corelația dintre mai mult de două variabile).

11.1. NOȚIUNEA DE CORELAȚIE

Se spune că două variabile sunt **corelate**, dacă distribuția scorurilor uneia dintre acestea se schimbă sub influența scorurilor celeilalte.

Să presupunem că ne interesează relația dintre satisfacția față de meseria practicată şi productivitatea muncii pentru muncitorii unei fabrici. Dacă aceste două variabile sunt corelate, atunci nivelurile de productivitate a muncii vor varia sub influența nivelurilor de satisfacție. Tabelul 11.1 prezintă relația în discuție pentru un eşantion de 173 de muncitori (date fictive).

Tabelul 11.1 Productivitatea şi satisfacția față de meseria practicată

Productivitatea (Y)	Satisfacția față de meserie (X)			TOTAL
	Scăzută	Medie	Înaltă	
Înaltă	10	15	27	52
Medie	20	25	18	63
Scăzută	30	21	7	58
TOTAL	60	61	52	173

Ca şi până acum, într-un tabel cu dublă intrare vom urma convenția tacită de a lua denumirile categoriilor variabilei independente (X) drept capete de coloane, iar denumirile categoriilor variabilei dependente (Y) drept capete de rânduri.

Într-un astfel de tabel, distribuțiile de frecvențe „pe coloană“ sunt numite **distribuții condiționate ale variabilei dependente**, deoarece prezintă distribuția scorurilor variabilei dependente pentru fiecare scor (condiție) al (a) variabilei independente. De pildă, în tabelul 11.1, prima coloană din stânga arată că dintre 60 de muncitori cu satisfacție scăzută față de meseria practicată, 10 sunt înalt productivi, 20 sunt mediu productivi, iar 30 au o productivitate scăzută. Inspectarea acestor distribuții condiționate ne permite să observăm efectele variabilei independente asupra variabilei dependente. Astfel, constatăm că distribuțiile condiționate ale

variabilei *productivitate* se schimbă în funcţie de diferitele scoruri ale variabilei *satisfacţie*. De pildă, jumătate dintre muncitorii cu satisfacţie scăzută faţă de meserie (30) au o productivitate scăzută, în timp ce peste jumătate dintre muncitorii cu satisfacţie înaltă faţă de meserie (27) au o productivitate înaltă. Aceasta arată că productivitatea în muncă şi satisfacţia faţă de meseria aleasă sunt corelate.

În tabelul 11.1, compararea distribuţiilor condiţionate ale variabilei dependente este uşor de făcut, deoarece marginalele coloanelor au valori apropiate. În mod obişnuit, nu aceasta este situaţia şi de aceea este util să controlăm distribuţiile condiţionate care dau totaluri diferite prin calcularea procentelor corespunzătoare în sensul variabilei independente (pe coloane) şi apoi să le comparăm în sensul variabilei dependente (pe rânduri). În tabelul 11.2 sunt prezentate procentele pentru datele din tabelul 11.1 (valori rotunjite), calculate în modul indicat.

Tabelul 11.2. Productivitatea şi satisfacţia faţă de meseria practicată
(în procente)

Productivitatea (Y)	Satisfacţia faţă de meserie (X)		
	Scăzută	Medie	Înaltă
Înaltă	17%	25%	52%
Medie	33	41	35
Scăzută	50	34	13
TOTAL	100,0%	100,0%	100,0%
	(60)	(61)	(52)

Să observăm că în tabelul 11.2, marginalele rândurilor au fost omise, iar marginalele coloanelor, faţă de care au fost calculate procentele, sunt prezentate între paranteze.

Putem vedea imediat că poziţia celulei cu cea mai mare frecvenţă relativă se schimbă de la o coloană la alta. Astfel, pentru muncitorii cu un nivel de satisfacţie scăzut, celula cu cea mai mare frecvenţă relativă (50%) se află pe ultimul rând; pentru muncitorii cu un nivel mediu de satisfacţie, celula cu ea mai mare frecvenţă relativă (41%) se află pe rân-

dul din mijloc; în fine, pentru muncitorii cu un nivel înalt de satisfacţie, celula cu cea mai mare frecvenţă relativă se află pe primul rând. Aceste rezultate întăresc concluzia că există o corelaţie între cele două variabile.

Dacă două variabile nu sunt corelate, atunci distribuţiile condiţionate ale variabilei dependente nu se vor modifica de la o coloană la alta sau, altfel spus, distribuţiile variabilei dependente vor fi aceleaşi pentru fiecare condiţie a variabilei independente. Dacă, de pildă, în loc de variabila *satisfacţie* am lua variabila *culoarea părului*, am obţine în fiecare celulă, probabil, un procent de aproximativ 33,3%.

Dacă două variabile sunt corelate, iar variabilele respective se află cel puţin la nivel ordinal, atunci se poate indica un sens al corelaţiei. Acesta poate fi *pozitiv* (direct) sau *negativ* (invers). De pildă, dacă se constată că performanţele şcolare ale unui eşantion de elevi într-o anumită perioadă sunt cu atât mai bune cu cât elevii respectivi au afectat un număr mai mare de ore pe săptămână studiului individual în acea perioadă, atunci se spune că între studiul individual şi performanţele şcolare există o corelaţie pozitivă. Dacă se constată că performanţele şcolare ale unui eşantion de elevi sunt cu atât mai slabe cu cât elevii respectivi au afectat un număr mai mare de ore pe săptămână vizionării emisiunilor TV, atunci se spune că între vizionarea emisiunilor TV şi performanţele şcolare există o corelaţie negativă. În general, două variabile sunt **corelate pozitiv** la nivelul unui eşantion, dacă subiecţii din eşantion care au scoruri înalte în privinţa unei variabile au scoruri înalte şi în privinţa celeilalte variabile, iar cei care au scoruri joase în privinţa unei variabile au scoruri joase în privinţa celeilalte variabile. Altfel spus, într-o corelaţie pozitivă, o variabilă creşte sau descreşte în valoare după cum creşte sau descreşte cealaltă. Tabelul 11.2 arată că variabilele *satisfacţie* şi *productivitatea muncii* sunt corelate pozitiv: un nivel înalt de satisfacţie este asociat cu un nivel înalt de productivitate, satisfacţia medie este asociată cu productivitatea medie, iar satisfacţia scăzută cu productivitatea scăzută. Două variabile sunt **corelate negativ** la nivelul unui eşantion, dacă subiecţii din eşantion care au scoruri înalte în privinţa unei variabile au scoruri joase în privinţa celeilalte variabile. Altfel spus, într-o corelaţie negativă, creşterea valorii unei variabile este însoţită de descreşterea valorii celeilalte variabile. Tabelul

11. 3 prezintă o corelaţie negativă între nivelul de educaţie şi vizionarea programelor TV (date fictive).

Tabelul 11.3. Nivelul de educaţie şi vizionarea programelor TV
(ilustrare pentru „corelaţie negativă“)

Gradul de urmărire a programelor TV	Nivelul de educaţie		
	Scăzut	Mediu	Înalt
Înalt	60%	20%	10%
Mediu	30	60	30
Scăzut	10	20	60
TOTAL	100,0%	100,0%	100,0%

Orice corelaţie, pozitivă sau negativă, poate fi apreciată după *tăria* sau *puterea* sa. Un caz extrem este cel al **corelaţiei perfecte**. Corelaţia dintre două variabile este perfectă, dacă fiecare scor al unei variabile este asociat cu un singur scor al celeilalte variabile, astfel că scorurile unei variabile pot fi determinate exact pe baza cunoaşterii scorurilor celeilalte variabile. Dacă, de pildă, între nivelul de educaţie şi vizionarea programelor TV ar fi o corelaţie (negativă) perfectă, atunci într-un tabel cu dublă intrare pentru aceste variabile, toate cazurile de pe fiecare coloană ar fi localizate într-o singură celulă, ceea ce ar arăta că nu există nici o variaţie a variabilei Y pentru orice scor dat al variabilei X. O astfel de situaţie este prezentată în tabelul 11.4.

Tabelul 11.4. Nivelul de educaţie şi vizionarea programelor TV
(ilustrare pentru „corelaţie negativă perfectă“ în procente)

Gradul de urmărire a programelor TV	Nivelul de educaţie		
	Scăzut	Mediu	Înalt
Înalt	100%	0%	0%
Mediu	0	100	0
Scăzut	0	0	100
TOTAL	100,0%	100,0%	100,0%

O corelație perfectă ar putea fi luată drept o dovadă puternică pentru o relație cauzală între variabile, cel puțin pentru eşantionul respectiv. Rezultatele prezentate în tabelul 11.4 ar indica faptul că, pentru eşantionul considerat, este foarte probabil ca singura cauză a gradului de urmărire a programelor TV să fie nivelul de educație. De asemenea, o corelație perfectă ar permite predicții fără eroare de la o variabilă la alta. De pildă, dacă am şti că o persoană din eşantion are un nivel înalt de educație, am putea prezice cu exactitate că gradul de urmărire a programelor TV pentru acea persoană este scăzut. Corelația perfectă este un caz ideal, care nu se întâlneşte în practica cercetării psihologice, dar care este luat ca reper pentru aprecierea tăriei corelațiilor dintre variabilele de interes.

În cele ce urmează, vom prezenta o serie de mărimi ale corelației, numite *coeficienți de corelație*, pentru diferite nivele de măsură. Aproape toate aceste mărimi sunt concepute astfel încât să aibă limita inferioară 0, indicând cazul „nici o corelație“, şi limita superioară 1 pentru nivelul nominal, respectiv ±1 pentru celelalte nivele, indicând cazurile „corelație pozitivă perfectă“ (+1) sau cazul „corelație negativă perfectă“. Acum, valorile coeficienților de corelație diferite de 0 şi ±1 nu au o interpretare directă precisă. Să presupunem, de pildă, că valoarea unui astfel de coeficient pentru două variabile este de 0,40. Aceasta înseamnă că între cele două variabile există o corelație importantă? A decide ce valoare a unui coeficient de corelație indică o legătură importantă între variabile este o chestiune care, pe de o parte, depinde de natura variabilelor considerate şi care, pe de altă parte, este întrucâtva arbitrară. În plus, după cum vom vedea, doi coeficienți de corelație pot avea valori diferite pentru aceleaşi date. Cu toate acestea, se admite că o interpretare rezonabilă a valorii unui coeficient de corelație se poate da conform următorului tabel[44]:

---

[44] Adaptat după D. E. Hinkle, W. Wiersma şi S. G. Jurs, 1988, p. 118.

Interpretarea valorii unui coeficient de corelație

Valoarea coeficientului	Interpretarea
+0,90 ÷ +0,99 (–0,90 ÷ –1,00)	Corelație pozitivă (negativă) foarte puternică sau aproape perfectă
+0,70 ÷ +0,90 (–0,70 ÷ –0,90)	Corelație pozitivă (negativă) puternică
+0,50 ÷ +0,70 (–0,50 ÷ –0,70)	Corelație pozitivă (negativă) moderată
+0,30 ÷ +0,50 (–0,30 ÷ –0,50)	Corelație pozitivă (negativă) slabă până la moderat
+0,01 ÷ +0,30 (–0,01 ÷ –0,30)	Corelație pozitivă (negativă) inexistentă sau foarte slabă

De notat că intervalele de valori se suprapun la extremități, ceea ce arată că interpretarea valorii unui coeficient de corelație rămâne relativ vagă.

11.2. MĂRIMI ALE CORELAȚIEI LA NIVEL NOMINAL

Cele mai utilizate mărimi ale corelației dintre variabile măsurate la nivel nominal sunt **coeficientul φ**, **coeficientul de contingență C**, **coeficientul V al lui Cramer** şi **coeficientul λ**.

Coeficienții φ, C şi V sunt mărimi ale corelației bazate pe χ^2. Coeficientul φ se calculează cu ajutorul următoarei formule:

Formula 11.1. $$\varphi = \sqrt{\frac{\chi^2}{n}}$$

Să considerăm din nou tabelul 10.1, în care se prezentau datele (fictive) ale unui studiu privind sexul şi dominanța funcțional–operativă a mâinilor, reprodus aici ca tabelul 11.5.

Tabelul 11.5 Sexul şi dominanța funcțional–operativă a mâinilor

Dominanța	Sexul		TOTAL
	Masculin	*Feminin*	
Dreapta	15	35	50
Stânga	30	10	40
Ambidextru	5	5	10
TOTAL	50	50	100

După cum am constatat prin aplicarea testului χ^2, relația dintre cele două variabile este statistic semnificativă, i.e valoarea χ^2 (obținut) = 18 s-a dovedit a fi semnificativă la un nivel de încredere de 95%. Ceea ce ne interesează acum este tăria corelației. Aplicând formula 11.1, obținem:

$$\varphi = \sqrt{\frac{\chi^2}{n}} = \sqrt{\frac{18}{100}} = 0{,}42$$

Valoarea φ = 0,42 indică o corelație cel mult moderată între sex şi dominanța funcțional–operativă a mâinilor. Relația dintre aceste variabile este statistic semnificativă (χ^2), dar nu este puternică. Problema este că φ ia valori cuprinse între 0 (nici o corelație) şi 1 (corelație perfectă) numai pentru tabele 2 × 2. Pentru tabelele de mare dimensiune, φ poate depăşi valoarea 1, ceea ce face ca interpretarea acestui coeficient să devină problematică. Oricum, după cum vom vedea, valoarea lui φ obținută pentru exemplul de mai sus este foarte apropiată de valorile obținute prin calcularea celorlalți coeficienți de corelație menționați.

Coeficientul C se calculează cu ajutorul următoarei formule:

Formula 11.2. $$C = \sqrt{\frac{\chi^2}{n + \chi^2}}$$

Aplicând această formulă la datele din tabelul 11.5, obținem:

$$C = \sqrt{\frac{\chi^2}{n + \chi^2}} = \sqrt{\frac{18}{100 + 18}} = 0{,}39$$

Deficiența coeficientului *C* este aceea că, fiind o mărime subunitară, nu poate lua niciodată valoarea 1. Se demonstrează că pe măsură ce dimensiunea tabelului creşte, *C* tinde către 1. De pildă, valoarea maximă a lui *C* este 0,82 pentru un tabel 3 × 3 şi 0,87 pentru un tabel 4 × 4. De aceea, se recomandă folosirea acestui coeficient numai pentru tabele de mare dimensiune (aproximativ de la 10 linii sau/şi coloane în sus).

Coeficientul *V* se calculează cu ajutorul următoarei formule:

Formula 11.3. $$V = \sqrt{\frac{\chi^2}{n(q - 1)}}$$

în care *q* este cea mai mică dintre valorile numerice *r* (număr de rânduri) şi *c* (număr de coloane) pentru tabelul respectiv. Aplicând formula 11.3 la datele din tabelul 11.5 obținem:

$$V = \sqrt{\frac{\chi^2}{n(q - 1)}} = \sqrt{\frac{18}{100(2 - 1)}} = 0{,}42$$

După cum se poate constata, rezultatul obținut prin calcularea coeficientului *V* este acelaşi cu cel obținut prin calcularea coeficientului φ. Coeficientul *V* are valoarea maximă 1, dar numai pentru tabele mai mari de 2 × 2.

Cu toate deficiențele lor, întrucât sunt uşor de calculat, coeficienții φ, *C* şi *V* pot fi folosiți în calitate de primi indici ai importanței unei corelații.

În situații de cercetare mai pretențioase se obişnuieşte să se utilizeze coeficientul λ, care ia valori cuprinse între 0 şi 1. În cazul în care nu se doreşte sau nu se poate identifica variabila independentă, se foloseşte

varianta simetrică a coeficientului λ, a cărui formulă de calcul este următoarea:

Formula 11.4.
$$\lambda = \frac{\sum_{x=1}^{c} n_{mx} + \sum_{y=1}^{r} n_{my} - n_{mc} - n_{mr}}{2n - n_{mc} - n_{mr}}$$

în care n_{mx} = cea mai mare frecvență în coloana *x;*
n_{my} = cea mai mare frecvență în rândul *y;*
n_{mc} = cel mai mare marginal de coloană;
n_{mr} = cel mai mare marginal de rând.

Să presupunem că într-o cercetare privind relația dintre apartenența religioasă şi atitudinea față de pedeapsa capitală s-au obținut rezultatele din tabelul 11.6.

Tabelul 11.6. Apartenența religioasă şi atitudinea față de pedeapsa capitală

Atitudinea	*Apartenența religioasă*				*TOTAL*
	Creştin-ortodox	*Catolic*	*Altele*	*Nici una*	
Favorabilă	5	10	9	14	38
Neutră	10	14	12	6	42
Împotrivă	25	11	4	10	50
TOTAL	40	35	25	30	130

Pentru datele din acest tabel avem:

$$\sum_{x=1}^{c} n_{mx} = 25 + 14 + 12 + 14 = 65$$

$$\sum_{y=1}^{r} n_{my} = 14 + 14 + 25 = 53$$

$$n_{mc} = 40$$

$$n_{mr} = 50$$

Aplicând formula 11.4, obținem:

$$\lambda = \frac{\sum_{x=1}^{c} n_{mx} + \sum_{y=1}^{r} n_{my} - n_{mc} - n_{mr}}{2n - n_{mc} - n_{mr}} = \frac{65 + 53 - 40 - 50}{2(130) - 40 - 50} = 0{,}16$$

Dacă se poate identifica variabila independentă, atunci se foloseşte varianta asimetrică a coeficientului λ, notat λ_y, a cărui formulă de calcul este următoarea:

Formula 11.5.

$$\lambda_y = \frac{\sum_{x=1}^{c} n_{mx} - n_{mr}}{n - n_{mr}}$$

Considerând exemplul de mai sus, dacă cercetătorul identifică drept variabilă independentă apartenența religioasă, atunci se obține:

$$\lambda_y = \frac{\sum_{x=1}^{c} n_{mx} - n_{mr}}{n - n_{mr}} = \frac{65 - 50}{130 - 50} = 0{,}19$$

Pentru cele mai multe situații de cercetare, interpretarea celor două variante ale coeficientului λ este similară interpretării coeficienților C şi V. Pentru exemplul considerat aici, putem conchide că cele două variabile sunt corelate, dar că această corelație este foarte slabă[45].

11.3. MĂRIMI ALE CORELAȚIEI LA NIVEL ORDINAL

Vom prezenta patru coeficienți ai corelației, utilizabili la nivel ordinal: $\boldsymbol{\gamma}$ al lui Goodman şi Kruskal, ***d*** al lui Somer, $\boldsymbol{\tau_b}$ al lui Kendall şi $\boldsymbol{\rho_s}$ al lui Spearman[46]. Aceşti coeficienți iau valori cuprinse între 0 şi ±1 (τ_b numai pentru cazul $r = c$).

---

[45] Pentru o prezentare detaliată a coeficientului λ ca o mărime a reducerii proporționale a erorilor (RPE), vezi Healey, 1984, pp. 223-228.

[46] γ, d şi τ_b pot fi interpretați ca mărimi ale RPE (vezi *ibidem*, cap. 14).

Coeficientul *γ* se utilizează în situaţii de cercetare în care avem două variabile măsurate la nivel ordinal cu un număr mic de valori (nu mai mult de cinci sau şase). Să presupunem că am obţinut următoarele date privind vechimea în muncă şi descurajarea profesională pentru un eşantion de 100 de cadre didactice din învăţământul primar:

Tabelul 11.7. Vechimea în muncă şi descurajarea profesională

Nivel de descurajare profesională (Y)	*Vechime în muncă (X)*			*TOTAL*
	Inferioară	*Medie*	*Superioară*	
Superior	8	11	21	40
Mediu	10	15	5	30
Inferior	20	6	4	30
TOTAL	38	32	30	100

În cele ce urmează, cazurile care fac parte din aceeaşi categorie a unei variabile vor fi numite *cazuri legate* ale variabilei respective.

Pentru a calcula coeficientul *γ*, sunt necesare două cantităţi, notate cu N_a şi respectiv N_d. Cantitatea N_a reprezintă numărul total de perechi de cazuri nelegate şi dispuse în aceeaşi ordine în privinţa ambelor variabile. Cantitatea N_d reprezintă numărul total de perechi de cazuri nelegate şi ordonate diferit în privinţa celor două variabile. Pentru aflarea acestor două cantităţi, vom lucra cu frecvenţele celulelor, considerând celulă cu celulă.

Pentru înlesnirea referirii la celulele unui tabel $n \times m$ vom numerota rândurile de la 1 la *n* începând de sus în jos şi, de asemenea, coloanele de la 1 la *m* începând de la stânga la dreapta; pentru fiecare celulă, vom folosi o notaţie de forma c_{ij}, în care *i* este numărul rândului, iar *j* numărul coloanei. Pentru un tabel 3 × 3, cum este 11.7, avem:

c_{11}	c_{12}	c_{13}
c_{21}	c_{22}	c_{23}
c_{31}	c_{32}	c_{33}

Să observăm că dacă alcătuim perechi selectând un caz dintr-o celulă c_{ij} şi un caz dintr-o celulă situată pe acelaşi rând cu c_{ij}, obţinem perechi de cazuri legate ale variabilei Y, iar dacă alcătuim perechi selectând un caz dintr-o celulă c_{ij} şi un caz dintr-o celulă situată pe aceeaşi coloană cu c_{ij}, obţinem perechi de cazuri legate ale variabilei X. Evident, dacă alcătuim perechi din aceeaşi celulă, obţinem perechi de cazuri legate în privinţa ambelor variabile. Dacă, însă, alcătuim perechi selectând un caz dintr-o celulă c_{ij} şi un caz dintr-o celulă situată *deasupra şi la dreapta* celulei c_{ij}, cazurile din perechile astfel obţinute sunt nelegate şi dispuse în aceeaşi ordine în privinţa ambelor variabile. De pildă, dacă alcătuim o pereche selectând un caz din celula c_{31} şi un caz din celula c_{12}, cazul din celula c_{31} are o vechime *mai mică* decât cazul din celula c_{12} şi la fel, cazul din celula c_{31} are un nivel de descurajare profesională *mai mic* decât cazul din celula c_{12}. Numărul total de perechi de cazuri alcătuite selectând un caz din celula c_{31} şi un caz din celula c_{12} se află înmulţind frecvenţele din cele două celule: $20 \cdot 11 = 220$. Cu alte cuvinte, contribuţia acestor două celule la cantitatea N_a este de 220 de perechi. Procedând la fel pentru fiecare dintre celelalte trei celule situate deasupra şi la dreapta celulei c_{31} (c_{13}, c_{22} şi c_{23}) şi adunând produsele astfel obţinute aflăm numărul total de perechi de cazuri alcătuite selectând un caz din celula c_{31} şi un caz din fiecare celulă situată deasupra şi la dreapta celulei c_{31}:

$$(20 \cdot 11) + (20 \cdot 21) +(20 \cdot 15) + (20 \cdot 5) = 1040$$

Acelaşi calcul îl putem efectua după cum urmează:

$$20(11 + 21 + 15 + 5) = 1040$$

Prin urmare, pentru a afla cantitatea N_a, se înmulţeşte frecvenţa din fiecare celulă cu suma frecvenţelor din toate celulele situate deasupra şi la dreapta celulei respective, după care se adună produsele astfel obţinute. De notat că nici una dintre celulele situate pe primul rând sau pe ultima coloană nu poate contribui la N_a, deoarece nu există celule situate deasu-

pra şi la dreapta acestora. Calcularea N_a pentru tabelul 11.7 decurge după cum urmează:

Pentru c_{31}:	$20(11 + 21 + 15 + 5)$	=	1 040
Pentru c_{32}:	$6(21 + 5)$	=	156
Pentru c_{21}:	$10(11 + 21)$	=	320
Pentru c_{22}:	$15 \cdot 21$	=	<u>315</u>
	N_a	=	1 831

Procedeul de calculare a N_d urmează o schemă simetrică faţă de cel pentru N_a, căci dacă alcătuim perechi selectând un caz dintr-o celulă c_{ij} şi un caz dintr-o celulă situată *deasupra şi la stânga* celulei c_{ij}, cazurile din perechile astfel obţinute sunt nelegate şi ordonate diferit în privinţa ambelor variabile. De pildă, dacă alcătuim o pereche selectând un caz din celula c_{33} şi un caz din celula c_{11}, cazul din celula c_{33} are o vechime *mai mare* decât cazul din celula c_{11} şi un nivel de descurajare profesională *mai mic* decât cazul din celula c_{11}. Prin urmare, pentru a afla cantitatea N_d, se înmulţeşte frecvenţa din fiecare celulă cu suma frecvenţelor din toate celulele situate deasupra şi la stânga celulei respective, după care se adună produsele astfel obţinute. Ca mai sus, să observăm că nici una dintre celulele situate pe primul rând sau pe prima coloană nu poate contribui la N_d, deoarece nu există celule situate deasupra şi la stânga acestora. Calcularea N_d pentru tabelul 11.7 decurge după cum urmează:

Pentru c_{33}:	$4(8 + 11 + 10 + 15)$	=	176
Pentru c_{32}:	$6(8 + 10)$	=	108
Pentru c_{23}:	$5(8 + 11)$	=	95
Pentru c_{22}:	$15 \cdot 8$	=	<u>120</u>
	N_d	=	499

În tabelul 11.7, un număr total de 1831 de perechi de cazuri sunt nelegate şi dispuse în aceeaşi ordine în privinţa ambelor variabile şi un număr total de 499 de perechi de cazuri sunt nelegate ordonate diferit în privinţa celor două variabile.

Coeficientul γ se calculează cu ajutorul următoarei formule:

Formula 11.6. $$\gamma = \frac{N_a - N_d}{N_a + N_d}$$

Valoarea coeficientului γ pentru datele din tabelul 11.7 este:

$$\gamma = \frac{N_a - N_d}{N_a + N_d} = \frac{1831 - 499}{1831 + 499} = 0{,}57$$

Vom conchide că vechimea în muncă este corelată moderat cu nivelul de descurajare profesională, această corelație fiind pozitivă: dacă, de pildă, ştim că *A* are o vechime mai mare în muncă decât *B*, suntem îndreptățiți să spunem că este probabil ca *A* să aibă un nivel de descurajare profesională mai înalt decât *B*.

Este important de observat că aplicarea coeficientului γ presupune (pentru a obține cantitățile N_a şi N_d) ca tabelul pe care se lucrează să fie construit în maniera tabelului 11.7, cu categoriile de pe coloane dispuse în ordine crescătoare de la stânga la dreapta şi categoriile de pe linii dispuse în ordine crescătoare de jos în sus. γ este o mărime simetrică a corelației: valoarea acestui coeficient va fi aceeaşi indiferent de variabila care este luată ca independentă.

Ca şi γ, coeficienții *d* al lui Somer şi τ_b al lui Kendall se utilizează în situații de cercetare în care avem două variabile măsurate la nivel ordinal cu un număr mic de valori şi necesită calcularea cantităților N_a şi N_d. În plus, aceşti coeficienți necesită calcularea a două cantități, notate L_y şi respectiv L_x. Cantitatea L_y reprezintă numărul total de perechi de cazuri legate ale variabilei dependente. Cantitatea L_x reprezintă numărul total de perechi de cazuri legate ale variabilei independente.

Numărul total de perechi de cazuri legate ale variabilei dependente, L_y, se determină aflând numărul de perechi de cazuri de pe fiecare rând (prin definiție, toate cazurile aflate pe acelaşi rând sunt legate în privința variabilei dependente) şi adunând cantitățile astfel obținute. Pentru a afla contribuția fiecărui rând la L_y, se înmulțeşte frecvența din fiecare celulă cu suma frecvențelor din toate celulele situate la dreapta (pe rândul respec-

tiv), după care e adună produsele astfel obținute. Evident, celulele situate pe ultima coloană nu pot contribui la L_y, deoarece nu există celule situate la dreapta acestora. Calcularea L_y pentru tabelul 11.7 decurge după cum urmează:

Pentru rândul 1:	$8(11 + 21) + (11 \cdot 21)$	=	487
Pentru rândul 2:	$10(15 + 5) + (15 \cdot 5)$	=	275
Pentru rândul 3:	$20(6 + 4) + (6 \cdot 4)$	=	<u>224</u>
	L_y	=	986

Numărul total de perechi de cazuri legate ale variabilei independente, L_x, se determină analog, lucrând însă pe coloane. Pentru a afla contribuția fiecărei coloane la L_x, se înmulțeşte frecvența din fiecare celulă cu suma frecvențelor din toate celulele situate dedesubt (pe coloana respectivă), după care e adună produsele astfel obținute. Evident, celulele situate pe ultimul rând nu pot contribui la L_x, deoarece nu există celule situate dedesubtul acestora. Calcularea L_x pentru tabelul 11.7 decurge după cum urmează:

Pentru coloana 1: $8(10 + 20) + (10 \cdot 20) = 440$
Pentru coloana 2: $11(15 + 6) + (15 \cdot 6) = 321$
Pentru coloana 3: $21(5 + 4) + (5 \cdot 4) = \underline{209}$
$L_x = 970$

În tabelul 11.7 avem un număr total de 986 de perechi de cazuri legate ale variabilei dependente şi un număr total de 970 de perechi de cazuri legate ale variabilei independente.

Coeficientul *d* al lui Somer se calculează cu ajutorul următoarei formule:

Formula 11.7.
$$d = \frac{N_a - N_d}{N_a + N_d + L_y}$$

Să observăm că această formulă diferă de formula pentru γ numai prin adunarea cantității L_y la numitor, ceea ce face ca d să fie o mărime a corelației mai conservatoare decât γ, deoarece valoarea lui d va fi întotdeauna mai mică decât valoarea lui γ pentru acelaşi tabel. Pentru tabelul 11.7, avem:

$$d = \frac{N_a - N_d}{N_a + N_d + L_y} = \frac{1831 - 449}{1831 + 449 + 986} = 0{,}40$$

Această valoare a coeficientului d indică o corelație pozitivă cel mult moderată între cele două variabile.

După cum se poate constata, coeficientul d este o mărime asimetrică a corelației. Dacă variabila ale cărei categorii sunt capete de rânduri este luată drept variabilă independentă, atunci se calculează numărul de perechi de cazuri pe coloane şi nu pe rânduri (în notația noastră, în formula 11.7 se ia L_x în loc de L_y). În cazul datelor din tabelului 11.7, valorile cantităților L_x şi L_y sunt apropiate, ceea ce înseamnă că o astfel de schimbare nu ar afecta mult valoarea coeficientului d. În cazul în care cele două cantități sunt sensibil diferite, trebuie să fim precauți în privința alegerii variabilei dependente, deoarece valoarea lui d poate fi considerabil afectată de această decizie.

Coeficientul τ_b al lui Kendall este o mărime simetrică a corelației, întrucât ține cont atât de L_y, cât şi de L_x. Formula sa de calcul este următoarea:

Formula 11.8.

$$\tau_b = \frac{N_a - N_d}{\sqrt{(N_a + N_d + L_y)(N_a + N_d + L_x)}}$$

Pentru tabelul 11.7 avem:

$$\tau_b = \frac{N_a - N_d}{\sqrt{(N_a + N_d + L_y)(N_a + N_d + L_x)}} =$$

$$\frac{1831 - 499}{\sqrt{(1831 + 499 + 986)(1831 + 499 + 970)}} = 0{,}40$$

Particularitatea coeficientului τ_b constă din aceea că poate lua valori cuprinse între 0 şi ±1 doar pentru tabele pătratice ($r = c$), deci nu se recomandă calcularea sa pentru orice tabel rectangular.

Coeficientul ρ_s al lui Spearman se utilizează, de regulă, în situaţii de cercetare în care avem două variabile măsurate la nivel ordinal, care au o amplitudine relativ largă de scoruri diferite şi puţine cazuri legate în privinţa fiecărei variabile. Să presupunem că dorim să verificăm ipoteza conform căreia persoanele care practică jogging au un sentiment mai puternic de respect faţă de sine. Pentru aceasta, 10 persoane care practică jogging au fost chestionate cu ajutorul a două scale, prima măsurând gradul de implicare în practicarea jogging-ului, cealaltă măsurând nivelul respectului faţă de sine. Datele obţinute, împreună cu o serie de calcule cerute de determinarea coeficientului ρ_s, sunt prezentate în tabelul 11.8.

Tabelul 11.8. Practicarea jogging-ului şi respectul faţă de sine

Cazul	Nivel de implicare	Rangul	Respect faţă de sine	Rangul	d	d^2
1	18	1	15	3	–2	4
2	17	2	18	1	1	1
3	15	3	12	4	–1	1
4	12	4	16	2	2	4
5	10	5	6	8	–3	9
6	9	6	10	5	1	1
7	8	7,5	8	6	1,5	2,25
8	8	7,5	7	7	0,5	0,25
9	5	9	5	9	0	0
10	1	10	2	10	0	0
					$\Sigma d = 0$	$\Sigma d^2 = 22{,}5$

Mai întâi, atribuim ranguri scorurilor fiecărei valori, începând cu cel mai mare scor. Apoi, pentru fiecare caz, calculăm diferența dintre rangul scorului în privința primei variabile (*X*) şi rangul scorurilor în privința celeilalte variabile (*Y*) (în tabel, coloana etichetată *d*). Să observăm că suma acestor diferențe este 0, ceea ce înseamnă că diferențele negative sunt egale cu cele pozitive, acesta fiind întotdeauna cazul. Dacă obținem $\Sigma d \neq 0$, atunci am greşit în atribuirea rangurilor sau/şi în calcularea diferențelor. Fiecare diferență astfel obținută este apoi ridicată la pătrat pentru a elimina semnele minus (în tabel, coloana d^2), după care se calculează suma acestor diferențe ridicate la pătrat, Σd^2.

Formula de calcul a coeficientului ρ_s al lui Spearman este următoarea:

Formula 11.9. $$\rho_s = 1 - \frac{6\Sigma d^2}{n(n^2 - 1)}$$

în care *n* este numărul de perechi de ranguri. Aplicând această formulă la datele din tabelul 11.8, obținem:

$$\rho_s = 1 - \frac{6\Sigma d^2}{n(n^2 - 1)} = 1 - \frac{6 \cdot 22,5}{10(100 - 1)} = 0,86$$

Acest rezultat indică o corelație pozitivă puternică între cele două variabile, ceea ce sprijină ipoteza cercetării.

În anumite situații de cercetare ne interesează să aflăm dacă două variabile sunt corelate la nivelul populației de referință. În cazul variabilelor măsurate la nivel nominal, semnificația statistică a unei corelații este judecată, de obicei, prin intermediul testului χ^2. De asemenea, testul χ^2 poate fi aplicat şi în cazul corelațiilor dintre variabile măsurate la nivel ordinal. Totuşi, acest test evidențiază doar probabilitatea ca frecvențele observate să se datoreze doar întâmplării şi, ca atare, nu reprezintă un test direct al corelației[47]. Pentru coeficienții γ şi ρ_s au fost elaborate teste de

[47] Luat în sine, χ^2 nu este o mărime a corelației. Deşi valorile diferite de 0 ale lui χ^2 indică existența unei corelații, valoarea numerică *efectivă* pentru χ^2 (obținut) nu stă în nici o legătură necesară cu tăria corelației: χ^2 (obținut) poate avea o valoare mare, în timp ce

semnificaţie specifice, în care ipoteza de nul enunţă că nu există nici o corelaţie la nivelul populaţiei, deci că valorile mărimilor respective sunt egale cu 0 : $\gamma = 0$, respectiv $\rho_s = 0$. Corespunzător, ipoteza alternativă enunţă că $\gamma \neq 0$ sau, respectiv, că $\rho_s \neq 0$[48]. Astfel, pentru eşantioane cu $n > 30$, distribuţia de eşantionare pentru γ aproximează distribuţia Z şi se foloseşte următoarea formulă pentru calcularea statisticii testului:

Formula 11.10. $$Z = \gamma\sqrt{\frac{N_a + N_d}{n(1-\gamma^2)}}$$

Regulile de decizie sunt cele cunoscute pentru testul Z.

În cazul coeficientului ρ_s, dacă $5 \leq n \leq 30$, atunci se foloseşte **tabelul valorilor critice pentru ρ_s** (anexa H). Pentru a folosi acest tabel, se identifică valoarea critică a lui ρ_s corespunzătoare numărului de perechi de ranguri, n, şi nivelului α ales. Pentru a putea respinge ipoteza de nul şi a conchide că variabilele respective sunt corelate la nivelul populaţiei, valoarea obţinută pentru ρ_s trebuie să fie mai mare decât valoarea critică. Dacă $n > 30$, atunci distribuţia de eşantionare pentru ρ_s aproximează distribuţia t cu $gl = n - 2$ şi se foloseşte următoarea formulă pentru calcularea statisticii testului:

Formula 11.11. $$t = \rho_s\sqrt{\frac{n-2}{1-\rho^2}}$$

Regulile de decizie sunt cele cunoscute pentru testul t – Student.

---

corelaţia efectivă poate fi slabă. Cu alte cuvinte, independenţa (χ^2) şi corelaţia sunt două aspecte diferite. Este perfect posibil ca două variabile să fie corelate (χ^2 (obţinut) $\neq 0$) şi totuşi să fie independente, în cazul în care nu putem respinge ipoteza de nul.

[48] Unii autori folosesc simbolurile g şi r_s, respectiv, pentru γ şi ρ, atunci când este vorba despre eşantioane, rezervând literele greceşti pentru cazul populaţiilor.

11.4. MĂRIMI ALE CORELAȚIEI LA NIVEL DE INTERVAL SAU DE RAPORT

Tehnicile statistice folosite pentru analiza corelației dintre variabile măsurate la nivel de interval sau de raport se bazează pe alte concepte şi modalități de calcul față de cele prezentate în secțiunea anterioară, dar urmăresc să răspundă la aceleaşi întrebări privind existența, sensul şi tăria unei corelații. În cele ce urmează, vom prezenta diagramele de împrăştiere, ecuația de regresie şi coeficientul de corelație ***r*** al lui Pearson.

Diagramele de împrăştiere[49] sunt modalități de prezentare vizuală a corelației dintre două variabile măsurate la nivel de interval sau de raport şi sunt analoge funcțional tabelelor bivariate, întrucât permit sesizarea rapidă a multor trăsături importante ale unei corelații.

Vom ilustra construirea unei diagrame de împrăştiere cu ajutorul unui exemplu. Să presupunem că ne interesează dacă există o relație între abilitățile de limbaj şi cele aritmetice pentru un eşantion de 9 elevi din învățământul primar. Rezultatele obținute prin aplicarea testelor corespunzătoare sunt prezentate în tabelul 11.9.

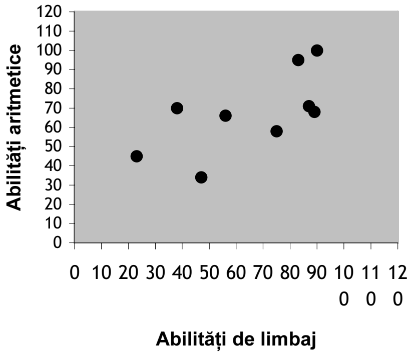
Tabelul 11.9. Abilități de limbaj şi abilități aritmetice

Elevul	Abilități de limbaj (*X*)	Abilități aritmetice (*Y*)
A	83	95
B	38	70
C	47	34
D	56	66
E	23	45
F	90	100
G	75	58
H	87	71
I	89	68

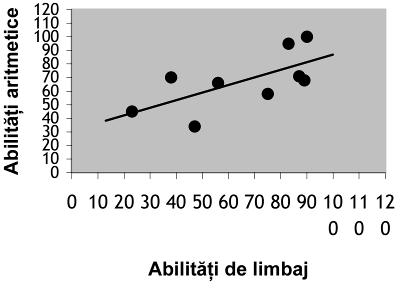
[49] Aceste diagrame se mai numesc şi *scatergrame* sau *diagrame ale norilor de puncte*.

Pentru a construi o diagramă de împrăştiere, folosim un sistem de axe rectangulare, dispunând valorile variabilei *X* pe axa orizontală (abscisa) şi valorile variabilei *Y* pe axa verticală (ordonata). Ambele axe se calibrează în unităţi corespunzătoare, respectiv, scalelor de măsură folosite pentru strângerea datelor. Pentru fiecare pereche de valori (pentru fiecare caz) se plasează un punct la intersecţia perpendicularelor respective pe cele două axe. Diagrama de împrăştiere pentru datele din tabelul 11.9 este prezentată în figura 11.1.

Figura 11.1. Abilităţi de limbaj şi abilităţi aritmetice



Fiecare elev este reprezentat printr-un punct plasat la intersecţia celor două scoruri obţinute de acesta. Dispunerea punctelor poate fi pusă în evidenţă prin trasarea unei linii drepte care să atingă fiecare punct sau să treacă cât se poate mai aproape posibil de fiecare punct. După cum vom vedea, această linie, numită **linie de regresie**, poate fi descrisă precis printr-o ecuaţie, dar deocamdată este suficientă trasarea sa aproximativă:



Punctele situate deasupra fiecărei valori *X* pot fi considerate distribuții condiționate ale lui *Y*; cu alte cuvinte, punctele reprezintă scoruri ale variabilei *Y* pentru fiecare scor al variabilei *X*. Figura 11.1 arată că aceste distribuții condiționate ale lui *Y* se modifică după cum se modifică *X* (scorurile *Y* variază în funcție de scorurile *X*), ceea ce înseamnă că cele două variabile sunt corelate. Existența unei corelații este evidențiată şi de faptul că linia de regresie formează un unghi cu axa *X* (abscisa). Dacă cele două variabile nu ar fi corelate, scorurile variabilei *Y* nu s-ar modifica în funcție de scorurile *X*, astfel că linia de regresie ar fi paralelă cu abscisa.

Sensul corelației poate fi detectat prin panta (înclinarea) liniei de regresie față de abscisă. În exemplul nostru avem o corelație pozitivă, deoarece elevii cu scoruri mari în privința variabilei *X* (*abilități de limbaj*) tind să aibă scoruri mari în privința variabilei *Y* (*abilități aritmetice*). Dacă între cele două variabile ar fi fost o corelație negativă, linia de regresie ar fi fost înclinată în direcția opusă, indicând că scorurile înalte ale unei variabile sunt asociate cu scoruri mici ale celeilalte variabile.

Tăria corelației poate fi aproximativ apreciată observând împrăştierea punctelor în jurul liniei de regresie. Într-o corelație perfectă, toate punctele s-ar afla pe linia de regresie. Prin urmare, cu cât punctele sunt mai puțin împrăştiate în jurul liniei de regresie, cu atât corelația este mai puternică.

O supoziție esențială care stă la baza tehnicilor statistice prezentate în continuare este aceea că între cele două variabile considerate este o **core-**

lație lineară, ceea ce înseamnă că dispunerea punctelor poate fi aproximată printr-o linie dreaptă. Această supoziție poate fi testată prin construirea unei diagrame de împrăştiere înaintea aplicării unei tehnici statistice. Dacă respectiva corelație nu este lineară, atunci supozițiile nivelului de măsură de interval sau de raport nu sunt satisfăcute, ceea ce înseamnă că variabilele trebuie să fie tratate ca şi cum ar fi de nivel ordinal.

Se demonstrează că linia care prezintă cel mai bine corelația dintre două variabile este descrisă de următoarea formulă, numită **ecuația de regresie bivariată**:

Formula 11.12. $$Y = a + bX$$

în care Y = scor al variabilei dependente;
a = punctul în care linia de regresie intersectează axa Y;
b = panta liniei de regresie;
X = scor al variabilei independente.

Parametrul b, numit **coeficient de regresie**, arată cantitatea de schimbare a lui Y care corespunde unei unități de schimbare a lui X. Panta unei linii de regresie poate fi pozitivă, negativă sau egală cu 0. În cazul $b = 0$, linia de regresie este paralelă cu abscisa (este orizontală), ceea ce înseamnă că între cele două variabile nu există nici o corelație. Coeficientul de regresie se calculează cu ajutorul următoarei formule:

Formula 11.13. $$b = \frac{n\Sigma XY - \Sigma X \Sigma Y}{n\Sigma X^2 - (\Sigma X)^2}$$

în care n = numărul de cazuri
ΣXY = suma produselor dintre cele două scoruri ale fiecărui caz;
ΣX = suma scorurilor variabilei X;
ΣY = suma scorurilor variabilei Y;
ΣX^2 = suma pătratelor scorurilor variabilei X.

Pentru determinarea valorii coeficientului de regresie se poate folosi un tabel de calcule, ilustrat aici pentru datele din tabelul 11.9.

Tabelul 11.10. Calcule pentru coeficientul de regresie (*b*)

X	*Y*	X^2	Y^2	*XY*
83	95	6 889	9 025	7 885
38	70	1 444	4 900	2 660
47	34	2 209	1 156	1 598
56	66	3 136	4 356	3 696
23	45	529	2 025	1 035
90	100	8 100	10 000	9 000
75	58	5 625	3 364	4 350
87	71	7 569	5 041	6 177
89	68	7 921	4 624	6 052
$\Sigma X = 588$	$\Sigma Y = 607$	$\Sigma X^2 = 43422$	$\Sigma Y^2 = 44\,491$	$\Sigma XY = 42\,453$

Astfel, în exemplul nostru, avem:

$$b = \frac{n\Sigma XY - \Sigma X \Sigma Y}{n\Sigma X^2 - (\Sigma X)^2} = \frac{(9 \cdot 42453) - (588 \cdot 607)}{(9 \cdot 43422) - 588^2} = 0,56$$

Această valoare a parametrului *b* arată că pentru fiecare unitate de schimbare a lui *X*, există o creştere de 0,56 unități în privința lui *Y*. Cu alte cuvinte, o creştere cu o unitate a scorului în privința abilităților de limbaj are drept rezultat o creştere cu 0,56 a scorului în privința abilităților aritmetice.

Parametrul *a*, numit **constanta de regresie**, se calculează cu ajutorul următoarei formule:

Formula 11.14. $a = \overline{Y} - b\overline{X}$

În exemplul nostru, avem:

$$\overline{Y} = \frac{\Sigma Y}{n} = \frac{607}{9} = 67,4$$

$$\bar{X} = \frac{\Sigma X}{n} = \frac{588}{9} = 65{,}3$$

$$a = 67{,}4 - (0{,}56 \cdot 65{,}3) = 30{,}8$$

Această valoare a parametrului *a* arată că linia de regresie intersectează axa *Y* (ordonata) în punctul în care *Y* = 30,8. De notat că *a* poate fi calculat şi cu ajutorul următoarei formule, echivalentă algebric cu formula 11.14:

Formula 11.15. $$a = \frac{\Sigma Y - b\Sigma X}{n}$$

În fine, ecuaţia de regresie pentru exemplul nostru este:

$$Y = a + bX = 30{,}8 + (0{,}56 \cdot X)$$

Linia de regresie poate fi folosită pentru a face predicţii asupra scorului unui caz în privinţa unei variabile, pornind de la scorul celuilalt caz în privinţa celeilalte variabile. Dacă se foloseşte variabila *X* pentru a face predicţii despre variabila *Y*, atunci linia de regresie este denumită *regresia lui Y asupra lui X*. Pentru ilustrare, să presupunem că, pe baza corelaţiei prezentate în figura 11.1, ne interesează să aflăm scorul în privinţa abilităţilor aritmetice al unui elev cu scorul 100 în privinţa abilităţilor de limbaj (observaţi că eşantionul nu conţine nici un elev cu scorul 100 la testul privind abilităţile de limbaj). Notăm scorul pe care dorim să în aflăm („scorul prezis“) cu $\hat{Y}$, pentru a-l distinge de scorurile *Y* efective. Folosind ecuaţia de regresie din exemplul nostru pentru *X* = 100, obţinem:

$$\hat{Y} = 30{,}8 + (0{,}56 \cdot X) = 30{,}8 + (0{,}56 \cdot 100) = 86{,}8$$

Prin urmare, pe baza regresiei lui *Y* asupra lui *X*, prezicem că un elev cu scorul 100 în privința abilităților de limbaj va obține scorul 86,8 în privința abilităților aritmetice.

Coeficientul *r* al lui Pearson este o mărime a corelației lineare dintre două variabile măsurate la nivel de interval sau de raport, care ia valori cuprinse între 0 şi ±1. Valoarea acestui coeficient poate fi calculată cu ajutorul următoarei formule:

Formula 11.16.
$$r = \frac{n\Sigma XY - \Sigma X \Sigma Y}{\sqrt{(n\Sigma X^2 - (\Sigma X)^2)(n\Sigma Y^2 - (\Sigma Y)^2)}}$$

Pentru a afla valoarea coeficientului *r* în cazul exemplului de mai sus, folosim tabelul 11.10, în care am adăugat deja o coloană pentru Y^2 şi am calculat suma corespunzătoare. Astfel, avem:

$$r = \frac{(9 \cdot 42453) - (588 \cdot 607)}{\sqrt{((9 \cdot 43422) - 588^2)((9 \cdot 44491) - 607^2)}} = 0,66$$

Ca şi în cazul celorlalți coeficienți ai corelației, valorile coeficientului *r* diferite de 0 şi de ±1 nu au o interpretare directă precisă. Valorile apropiate de 0 pot fi interpretate ca indicând o corelație foarte slabă, iar cele care se apropie de ±1, ca indicând o corelație foarte puternică. O interpretare mai directă este dată de calcularea **coeficientului de determinare bivariată**, care este pur şi simplu r^2. În exemplul nostru, r^2 = 0,435. Această valoare arată că scorurile obținute în privința abilităților de limbaj (*X*) explică aproximativ 43,5% din variația totală a scorurilor obținute în privința abilităților aritmetice, restul de 56,5% din această variație datorându-se probabil influenței altor variabile, erorilor de măsurare sau întâmplării.

În condițiile în care eşantionul respectiv a fost alcătuit aleatoriu, valoarea coeficientului *r* al lui Pearson poate fi testată pentru semnificația la nivelul populației de referință, distribuția de eşantionare fiind distribuția *t*

cu $gl = n - 2$. Calcularea statisticii testului se face cu ajutorul următoarei formule:

Formula 11.17. $$t = r\sqrt{\frac{n-2}{1-r^2}}$$

Dacă variabilele sunt corelate la nivelul eşantionului şi valoarea lui *t* (obţinut) cade în zona critică, atunci vom respinge ipoteza de nul şi vom conchide că variabilele respective sunt corelate şi la nivelul populaţiei (cu probabilitatea dată de nivelul α ales); dacă, însă, valoarea lui *t* (obţinut) nu cade în zona critică, atunci nu suntem îndreptăţiţi să conchidem că variabilele sunt corelate la nivelul populaţiei. Într-un astfel de caz, testul arată că valoarea coeficientului *r* la nivelul eşantionului poate să apară numai datorită întâmplării, dacă ipoteza de nul este adevărată, i.e. dacă variabilele respective nu sunt corelate la nivelul populaţiei.

Este important de reţinut că semnificaţia valorii coeficientului *r* poate fi testată cu ajutorul formulei 11.6 numai dacă, pe lângă supoziţia de linearitate a corelaţiei, este satisfăcută atât supoziţia că ambele variabile au o distribuţie normală (**distribuţie bivariată normală**), cât şi supoziţia că abaterile standard ale distribuţiilor condiţionate ale variabilei *Y* sunt aproximativ egale. Pentru această ultimă supoziţie se foloseşte conceptul de **homoscedasticitate**. În mod obişnuit, inspectarea vizuală a unei diagrame de împrăştiere este suficientă pentru a aprecia dacă o corelaţie se conformează supoziţiilor de linearitate şi homoscedasticitate. După cum am arătat, dacă dispunerea punctelor poate fi aproximată printr-o linie dreaptă, atunci corelaţia poate fi apreciată ca fiind lineară. Pe de altă parte, dacă scorurile *Y* sunt relativ uniform împrăştiate deasupra şi dedesubtul liniei de regresie, atunci corelaţia este homoscedastică. De pildă, după cum se poate constata imediat, corelaţia prezentată în figura 11.1 este homoscedastică: din cele 9 cazuri, cinci se află deasupra liniei de regresie, iar patru dedesubt.

11.5. ELEMENTE DE ANALIZĂ MULTIVARIATĂ

Unele situații de cercetare necesită analiza mai multor variabile, chiar dacă cercetătorul este interesat în principal de o anumită corelație bivariată. Tehnicile prezentate în această secțiune se referă la corelația multivariată dintre variabile măsurate la nivel de interval sau de raport şi se bazează pe coeficientul *r* al lui Pearson.

11.5.1. CORELAȚIA PARȚIALĂ

Metoda corelației parțiale poate fi folosită atunci când cercetătorul doreşte să observe influența unei a treia (a patra etc.) variabile asupra unei corelații bivariate. În cele ce urmează vom folosi următoarele simboluri, numite **coeficienți de corelație parțială de ordinul zero**:

r_{yz} = coeficientul de corelație dintre variabila *Y* şi variabila *Z*;
r_{xy} = coeficientul de corelație dintre variabila *X* şi variabila *Y*;
r_{xz} = coeficientul de corelație dintre variabila *X* şi variabila *Z*.

Aceşti coeficienți se calculează cu formula 11.16, făcând înlocuirile corespunzătoare.

Atunci când controlăm influența unei singure variabile *X* asupra corelației dintre variabilele *Y* şi *Z* folosim simbolul r_{yzx}, numit **coeficient de corelație parțială de ordinul întâi**; r_{yzx} se referă la coeficientul de corelație parțială dintre variabilele *Y* şi *Z* sub influența variabilei *X* („variabila de control“); r_{yzx} se calculează cu ajutorul următoarei formule:

Formula 11.18.

$$r_{yzx} = \frac{r_{yz} - r_{xy} r_{xz}}{\sqrt{(1 - r_{xy}^2)(1 - r_{xz}^2)}}$$

Pentru ilustrare, să considerăm datele din tabelul 11.11, în care se prezintă distribuția a trei variabile, *X*, *Y* şi *Z*, împreună cu valorile parțialilor de ordinul zero. Să presupunem că ne interesează influența variabilei *X* asupra corelației dintre *Y* şi *Z*.

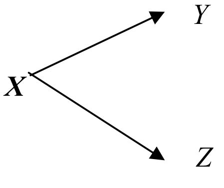
Tabelul 11.11. O ilustrare a corelației parțiale

X	*Y*	*Z*
2	12	4
7	14	10
8	18	8
4	15	9
5	14	7
r_{yz} = 0,50	r_{xy} = 0,78	r_{xz} = 0,70

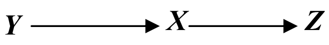
Valoarea r_{yz} = 0,50 indică o corelație pozitivă moderată între variabilele *Y* şi *Z*. Aplicând formula 11.18, obținem:

$$r_{yzx} = \frac{r_{yz} - r_{xy}r_{xz}}{\sqrt{(1-r_{xy}^2)(1-r_{xz}^2)}} = \frac{0{,}5-(0{,}78\cdot 0{,}70)}{\sqrt{(1-(0{,}78)^2)(1-(0{,}70)^2)}} = -0{,}098$$

Această valoare a coeficientului parțial de ordinul întâi este mult mai mică decât valoarea coeficientului parțial de ordinul zero, r_{yz} = 0,50. Acest rezultat, pe care îl vom nota prin $r_{yzx} << r_{yz}$, arată că dacă eliminăm influența variabilei *X* asupra variabilelor *Y* şi *Z*, corelația dintre variabilele *Y* şi *Z* se reduce de la 0,5 la aproape 0. Într-un astfel de caz, se poate ca *X* să determine atât variația lui *Y*, cât şi variația lui *Z*, relația dintre *Y* şi *Z* fiind inautentică (aparentă), sau ca variabilele *Y* şi *Z* să fie corelate, dar nu direct, ci prin intermediul variabilei *X*:



sau

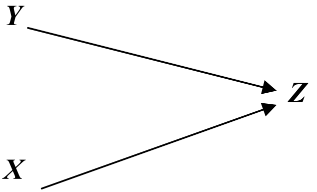


În exemplul nostru, valorile r_{xy} = 0,78 şi r_{xz} = 0,70 pot fi luate drept un indiciu probabil al tipului de relație reprezentat prin diagrama din stânga.

De notat că distincţia dintre cele două tipuri de relaţie nu poate fi făcută cu precizie doar pe baza metodelor statistice. Într-o situaţie reală de cercetare, distincţia se poate face pe criterii de conţinut al cercetării respective (ordinea temporală dintre variabile ş.a).

Un al doilea tip de rezultat posibil este acela în care r_{yzx} şi r_{yz} au valori apropiate. Acest rezultat, pe care îl vom nota prin $r_{yzx} \cong r_{yz}$, arată că dacă eliminăm influenţa variabilei X asupra variabilelor Y şi Z, corelaţia dintre variabilele Y şi Z rămâne neschimbată, sau, altfel spus că X nu influenţează semnificativ corelaţia dintre Y şi Z, relaţia dintre variabilele Y şi Z fiind directă.

Al treilea tip de rezultat posibil este acela în care valoarea lui r_{yzx} este mult mai mare decât valoarea lui r_{yz}. Acest rezultat, pe care îl vom nota prin $r_{yzx} >> r_{yz}$, arată că variabila luată iniţial drept independentă şi variabila de control (X) au fiecare în parte o influenţă separată asupra variabilei dependente şi nu sunt corelate una cu alta. Următoarea diagramă prezintă acest tip de relaţie pentru cazul în care Z este variabila dependentă:



Dacă se obţine acest rezultat, concluzia este că atât Y, cât şi X sunt variabile independente, iar următoarea etapă în analiza statistică este, probabil, utilizarea regresiei multiple şi a corelaţiei multiple. Metoda regresiei multiple permite izolarea influenţelor separate ale mai multor variabile independente asupra variabilei dependente şi astfel permite identificarea variabilei independente care are cea mai puternică influenţă asupra variabilei dependente, iar metoda corelaţiei multiple permite evidenţierea influenţelor combinate ale tuturor variabilelor independente asupra variabilei dependente.

11.5.2. REGRESIA MULTIPLĂ

Ecuația de regresie poate fi modificată pentru a include (teoretic) un număr oricât de mare de variabile independente. Această tehnică statistică se numeşte **regresie multiplă**. În cazul a două variabile independente, linia de regresie multiplă este descrisă de următoarea formulă, numită **ecuația de regresie multiplă**:

Formula 11.19. $$Y = a + b_1X_1 + b_2X_2$$

în care b_1 = panta parțială a corelației dintre prima variabilă independentă şi Y;
b_2 = panta parțială a corelației dintre a doua variabilă independentă şi Y.

Parametrii b_1 şi b_2 se calculează cu ajutorul următoarelor formule:

Formula 11.20. $$b_1 = \frac{s_y}{s_1} \cdot \frac{r_{1y} - r_{2y}r_{12}}{1 - r_{12}^2}$$

Formula 11.21. $$b_2 = \frac{s_y}{s_2} \cdot \frac{r_{2y} - r_{1y}r_{12}}{1 - r_{12}^2}$$

în care s_y = abaterea standard a variabilei Y
s_1 = abaterea standard a variabilei independente X_1;
s_2 = abaterea standard a variabilei independente X_2;
r_{1y} = coeficientul de corelație dintre X_1 şi Y;
r_{2y} = coeficientul de corelație dintre X_2 şi Y;
r_{12} = coeficientul de corelație dintre X_1 şi X_2.

Pentru a ilustra calcularea parametrilor b_1 şi b_2, să considerăm datele din tabelul 11.12, în care, pentru un eşantion de 15 subiecți, se prezintă scorurile obținute înaintea unui test (X_1), numărul mediu de răspunsuri corecte date la şase încercări preliminare (X_2) şi scorurile post-test (Y).

Tabelul 11.12. O ilustrare pentru două variabile independente

X_1	X_2	Y
15	7,70	36
22	8,20	39
16	7,80	35
19	9,30	43
22	8,20	40
20	8,80	42
28	12,10	49
14	8,00	38
18	8,10	36
21	11,20	44
26	9,40	35
14	10,30	43
19	8,50	37
22	7,60	41
20	8,40	40
s_1 = 4,06	s_2 = 1,34	s_3 = 3,92
r_{1y} = 0,39	r_{2y} = 0,77	r_{12} = 0,45

Aplicând formulele 11.20 şi 11.21, obţinem:

$$b_1 = \frac{s_y}{s_1} \cdot \frac{r_{1y} - r_{2y} r_{12}}{1 - r_{12}^2} = \frac{3{,}92}{4{,}06} \cdot \frac{0{,}39 - (0{,}77 \cdot 0{,}45)}{1 - (0{,}45)^2} = 0{,}052$$

$$b_2 = \frac{s_y}{s_2} \cdot \frac{r_{2y} - r_{1y} r_{12}}{1 - r_{12}^2} = \frac{3{,}92}{1{,}34} \cdot \frac{0{,}77 - (0{,}39 \cdot 0{,}45)}{1 - (0{,}45)^2} = 2{,}18$$

Parametrul a se calculează cu ajutorul următoarei formule:

Formula 11.22. $$a = \overline{Y} - b_1 \overline{X}_1 - b_2 \overline{X}_2$$

În exemplul nostru, avem:

$$\overline{X}_1 = \frac{\Sigma X_1}{n} = \frac{295}{15} = 19{,}73 \qquad \overline{X}_2 = \frac{\Sigma X_2}{n} = \frac{133{,}6}{15} = 8{,}90$$

$$\overline{Y} = \frac{\Sigma Y}{n} = \frac{598}{15} = 39{,}86$$

$$a = \overline{Y} - b_1\overline{X}_1 - b_2\overline{X}_2 = 39{,}86 - (0{,}052 \cdot 19{,}73) - (2{,}18 \cdot 8{,}90) = 19{,}38$$

În fine, ecuația de regresie multiplă pentru exemplul nostru este:

$$Y = a + b_1X_1 + b_2X_2 = 19{,}38 + (0{,}052 \cdot X_1) + (2{,}18 \cdot X_2)$$

Acum, să presupunem că ne interesează să prezicem scorul post-test al unui subiect cu scorul pre-test de 25 şi media răspunsurilor corecte la încercările preliminare de 11,16. Folosind ecuația de regresie multiplă din exemplul nostru pentru $X_1 = 25$ şi $X_2 = 11{,}16$, obținem:

$$\hat{Y} = 19{,}38 + (0{,}052 \cdot 25) + (2{,}18 \cdot 11{,}16) = 45$$

Prin urmare, prezicem că un subiect cu scorurile $X_1 = 25$ şi $X_2 = 11{,}16$ va obține un scor post-test de 45.

În cele ce urmează prezentăm o modalitate simplificată de utilizare a metodei regresiei multiple pentru evaluarea influențelor separate ale variabilelor independente asupra variabilei dependente. Pentru o astfel de evaluare se consideră scorurile standardizate ale variabilelor şi se utilizează **coeficienții de regresie standardizați**, simbolizați în general prin β. Aceste mărimi, numite şi „pante parțiale standardizate“, arată cantitatea de schimbare a abaterii standard a variabilei Y corespunzătoare unei unități de schimbare a abaterii standard a unei variabile independente, în timp ce influențele celorlalte variabile independente sunt controlate. În cazul a două variabile independente, aceşti coeficienți se calculează cu ajutorul următoarelor formule:

Formula 11.23. $$\beta_1 = b_1 \frac{s_1}{s_y}$$

Formula 11.24. $$\beta_2 = b_2 \frac{s_2}{s_y}$$

în care β_1 = panta parțială standardizată a corelației dintre X_1 şi Y
β_2 = panta parțială standardizată a corelației dintre X_2 şi Y

Ecuația de regresie multiplă standardizată este dată de următoarea formulă:

Formula 11.25. $$Z_y = a_z + \beta_1 Z_1 + \beta_2 Z_2$$

în care simbolul Z arată că toate scorurile au fost standardizate. Amintim că formula de calcul pentru standardizarea scorurilor unui eşantion este

$$Z = \frac{X - \overline{X}}{s}$$

Acum, formula 11.25 poate fi simplificată, întrucât definiția algebrică a parametrului a_z este $a_z = \overline{Y} - b_1 \overline{Z}_1 - b_2 \overline{Z}_2$ şi, după cum ştim, media aritmetică a oricărei distribuții standardizate de scoruri este 0. Ca atare, a_z se reduce la 0, astfel că pentru ecuația de regresie multiplă standardizată putem folosi următoarea formulă:

Formula 11.26. $$Z_y = \beta_1 Z_1 + \beta_2 Z_2$$

Pentru exemplul de mai sus, valorile coeficienților de regresie standardizați sunt:

$$\beta_1 = b_1 \frac{s_1}{s_y} = 0{,}052 \frac{4{,}06}{3{,}92} = 0{,}0538$$

$$\beta_2 = b_2 \frac{s_2}{s_y} = 2{,}18 \frac{1{,}34}{3{,}92} = 0{,}74$$

Astfel, ecuația de regresie multiplă standardizată pentru acest exemplu este:

$$Z_y = (0{,}0538 \cdot Z_1) + (0{,}74 \cdot Z_2)$$

Concluzia este că variabila X_2 are o influență mult mai puternică asupra variabilei dependente decât variabila X_1, astfel că predicțiile asupra scorurilor standardizate Z_y nu vor fi influențate semnificativ de scorurile Z_1.

Inspectarea datelor din tabelul 11.12 oferă unele indicii privind explicația rezultatului obținut. Astfel, putem observa că X_2 este puternic corelată cu Y ($r_{2y} = 0{,}77$), în timp ce X_1 prezintă o corelație slabă până la moderat cu Y ($r_{1y} = 0{,}39$).

De notat că dacă am fi obținut $\beta_1 >> \beta_2$, am fi tras concluzia că variabila X_1 are o influență mult mai puternică asupra variabilei dependente decât variabila X_2, iar dacă am fi obținut $\beta_1 \cong \beta_2$, am fi tras concluzia că cele două variabile independente au aproximativ aceeaşi influență asupra variabilei dependente.

11.5.3. CORELAȚIA MULTIPLĂ

Metoda corelației multiple permite evidențierea influențelor combinate ale tuturor variabilelor independente asupra variabilei dependente. Pentru aceasta, se calculează **coeficientul de corelație multiplă *R*** şi **coeficientul de determinare multiplă R^2**.

O formulă de calcul pentru coeficientul R în cazul a două variabile independente este următoarea:

Formula 11.27. $R = \sqrt{\beta_1 r_{1y} + \beta_2 r_{2y}}$

Pentru datele din exemplul de mai sus, avem:

$$R = \sqrt{\beta_1 r_{1y} + \beta_2 r_{2y}} = \sqrt{(0{,}0538 \cdot 0{,}39) + (0{,}74 \cdot 0{,}77} = 0{,}77$$

Acest rezultat indică o corelaţie puternică între influenţele combinate ale variabilelor X_1 şi X_2 şi variabila Y.

Coeficientul de determinare multiplă R^2 se interpretează în acelaşi fel ca şi coeficientul de determinare bivariată r^2. În exemplul nostru, $R^2 = 0{,}59$, ceea ce arată că influenţa combinată a celor două variabile independente explică aproximativ 59% din variaţia totală a scorurilor post-test, restul de 41% din această variaţie datorându-se probabil influenţei altor variabile, erorilor de măsurare sau întâmplării.

GLOSAR

Coeficientul *d* al lui Somer: mărime asimetrică a corelației, adecvată pentru cazul a două variabile măsurate la nivel ordinal cu un număr mic de valori.
Coeficientul de contingență *C*: mărime a corelației bazate pe χ^2, adecvată pentru cazul a două variabile măsurate la nivel nominal; se recomandă calcularea acestui coeficient numai pentru tabele de mari dimensiuni.
Coeficientul *r* al lui Pearson: mărime a corelației lineare dintre două variabile măsurate la nivel de interval sau de raport.
Coeficientul *V* al lui Cramer: mărime a corelației bazate pe χ^2, adecvată pentru cazul a două variabile măsurate la nivel nominal; se recomandă calcularea acestui coeficient numai pentru tabele mai mari de 2×2.
Coeficientul γ: mărime simetrică a corelației, adecvată pentru cazul a două variabile măsurate la nivel ordinal cu un număr mic de valori.
Coeficientul ρ al lui Spearman: mărime a corelației adecvată pentru cazul a două variabile măsurate la nivel ordinal cu o amplitudine relativ largă de scoruri diferite şi puține cazuri legate în privința fiecărei variabile.
Coeficientul τ_b al lui Kendall: mărime simetrică a corelației adecvată pentru cazul a două variabile măsurate la nivel ordinal cu un număr mic de valori; se recomandă calcularea acestui coeficient numai pentru tabele pătratice.
Coeficientul φ: mărime a corelației bazate pe χ^2, adecvată pentru cazul a două variabile măsurate la nivel nominal; se recomandă calcularea acestui coeficient numai pentru tabele 2×2.
Corelație: relație între două sau mai multe variabile; se spune că două variabile sunt corelate dacă distribuția scorurilor uneia dintre acestea se schimbă sub influența scorurilor celeilalte.
Corelație negativă: corelație între două variabile, caracterizată prin aceea că scoruri înalte ale unei variabile sunt asociate cu scoruri joase ale celeilalte variabile sau, altfel spus, variabilele variază în sensuri opuse.
Corelație pozitivă: corelație între două variabile, caracterizată prin aceea că scoruri înalte ale unei variabile sunt asociate cu scoruri înalte ale celeilalte variabile, iar scoruri joase ale unei variabile sunt asociate cu scoruri joase ale celeilalte variabile sau, altfel spus, variabilele variază în acelaşi sens.
Corelație lineară: corelație între două variabile de interval sau de raport, caracterizată prin aceea că dispunerea punctelor în diagrama

de împrăştiere poate fi aproximată printr-o linie dreaptă.

Corelaţie perfectă: corelaţia dintre două variabile, caracterizată prin aceea că fiecare scor al unei variabile este asociat cu un singur scor al celeilalte variabile.

Diagrame de împrăştiere: modalităţi de prezentare vizuală a corelaţiei dintre două variabile măsurate la nivel de interval sau de raport.

Ecuaţia de regresie bivariată: ecuaţie care descrie matematic o linie de regresie.

Linie de regresie: linie dreaptă care rezumă cel mai bine corelaţia dintre două variabile de interval sau de raport.

Mărimile corelaţiei: mărimi statistice care permit cuantificarea importanţei (tăriei) unei relaţii dintre variabile.

Metoda corelaţiei multiple: tehnică multivariată de evidenţiere a influenţelor combinate ale tuturor variabilelor independente asupra variabilei dependente.

Metoda corelaţiei parţiale: tehnică multivariată de evidenţiere a influenţei unei a treia (a patra etc.) variabile asupra unei corelaţii bivariate.

Metoda regresiei multiple: tehnică multivariată care permite izolarea influenţelor separate ale mai multor variabile independente asupra variabilei dependente şi astfel permite identificarea variabilei independente care are cea mai puternică influenţă asupra variabilei dependente.

Predicţie: apreciere a scorurilor unei variabile pe baza cunoaşterii scorurilor în privinţa altei variabile; o predicţie este cu atât mai precisă, cu cât corelaţia dintre cele două variabile este mai puternică.

12

INTRODUCERE ELEMENTARĂ ÎN SPSS[50]

SPSS[51] este un program performant ce permite analize statistice şi managementul datelor înregistrate în sistem, utilizând, asemenea mediului Windows, o interfață grafică bazată pe căsuțe de dialog, pentru a facilita accesul acestora de către utilizatori. Structural, mediul SPSS se apropie ca formă de sistemele de gestionare a datelor de tip Acces, Excel etc., având însă particularități şi facilități distincte, pe care le vom evidenția în continuare.

Principial, ferestrele active sub SPSS sunt de diverse forme, cuprinzând facilități legate de:

Data editor: permite afişarea în cadrul ferestrelor sale a conținutului datelor stocate. Acest tip de fereastră se deschide în mod automat o dată cu lansarea mediului SPSS, permițând deopotrivă vizualizarea datelor existente, introducerea unora noi sau modificarea acestora.

Viewer: asigură în cadrul propriei ferestre vizualizarea tuturor categoriilor de rezultate, tabele şi diagrame obținute în urma procesării datelor statistice. Fereastra de tip Viewer se deschide în mod automat de către program o dată cu terminarea procesării datelor propuse spre analiză.

Draft viewer: această categorie de fereastră este utilizată atunci când se doreşte tipărirea rezultatelor doar sub un format de text simplu, rezultat din tabelele pivot.

---

[50] Capitol elaborat de Sergiu Stan.

[51] Prescurtarea de la denumirea programului în limba engleză: *Statistical Package for the Social Sciences*.

Pivot table editor: permite modificarea tabelelor pivot rezultate în urma procesării datelor prin intermediul facilităţilor de modificare a formei, culorii, fonturilor caracterelor, dispunerii acestora etc. în cadrul tabelelor pivot.

Chart editor: face parte din categoria ferestrelor interactive care permit modificarea rezoluţiei, culorilor, formei etc. graficelor rezultate în aplicaţia statistică.

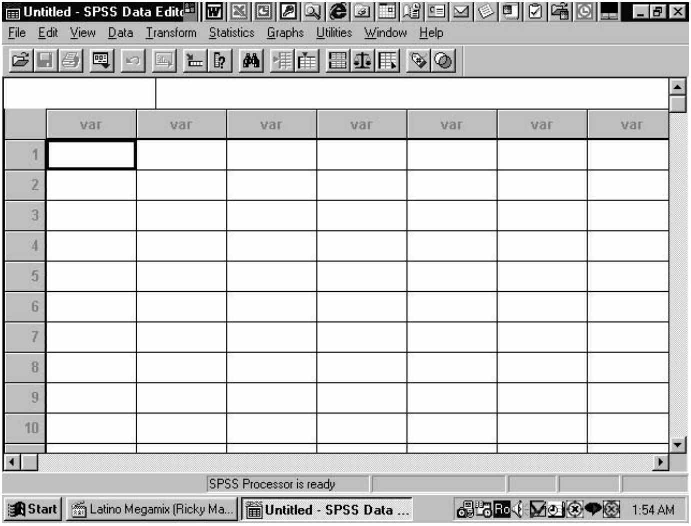
Text output editor: este utilizat atunci când se doreşte prezentarea finală a datelor sub forma simplă de text, fără a prezenta însă structura rezultată din tabelele pivot. De asemenea, în cadrul acestei ferestre sunt activate facilităţile de modificare a formei, stilului, culorii şi mărimii caracterelor.

Syntax editor: este o fereastră care se poate ataşa căsuţelor de dialog pentru verificarea sintaxei în cadrul textelor, împreună cu toate facilităţile aferente, atunci când utilizatorul doreşte acest lucru.

Script editor: reprezintă o facilitate acordată de către programul SPSS, care permite crearea şi modificarea structurilor de gestionare a datelor existente cu ajutorul unui sistem de tip OLE.

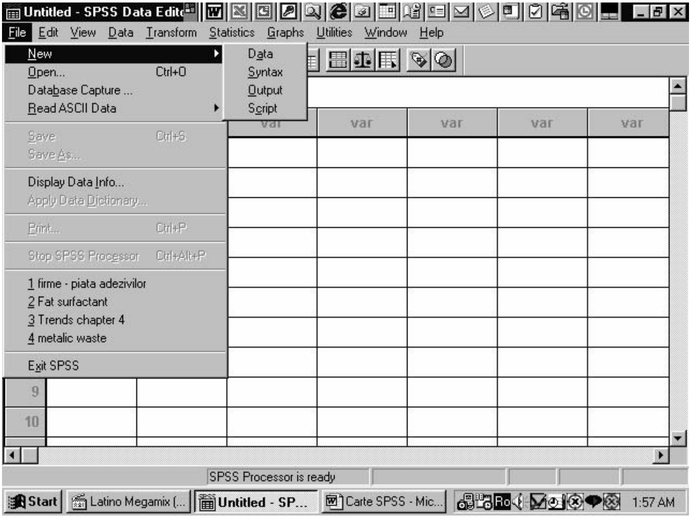
Toate aceste ferestre pot fi apelate în mod succesiv de către utilizatorii programului SPSS, fără însă a avea şi facilitatea de a fi deschise toate în paralel (aşa cum se obişnuieşte deseori în cadrul mediului Windows).

La deschiderea unei noi aplicaţii în SPSS, fereastra de tip *Viewer* care se deschide utilizatorului prezintă următoarea formă:



O dată cu lansarea în execuție a programului, se pot identifica căsuțe de dialog active de pe toolbar, acestea fiind *File*, *Edit*, *View*, *Data*, *Transform*, *Statistics*, *Graphics*, *Utilities*, *Windows* şi *Help*. La rândul lor, fiecare dintre aceste căsuțe de dialog prezintă o serie de facilități pe care le vom prezenta succint în continuare sub formă grafică, pentru a oferi cititorului o imagine concludentă asupra conținutului acestora, fără să ne propunem aici prezentarea unui ghid de utilizare a programului SPSS[52]. Astfel, căsuța de dialog *File* prezintă următoarea structură:

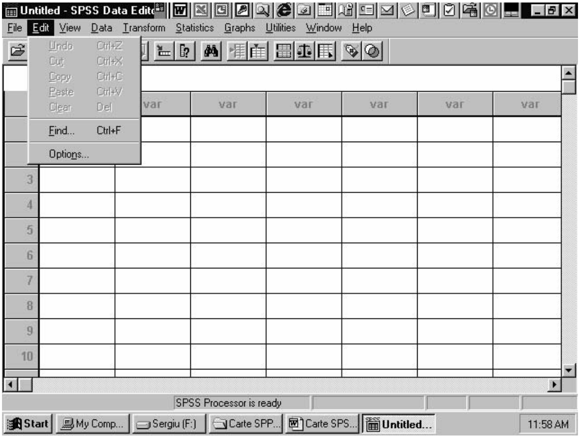
[52] Pentru aceasta, vezi manualele *SPSS Base 10.0 User's Guide*, *SPSS Base 10.0 Application Guide* şi *SPSS Interactive Graphics 10.0*.



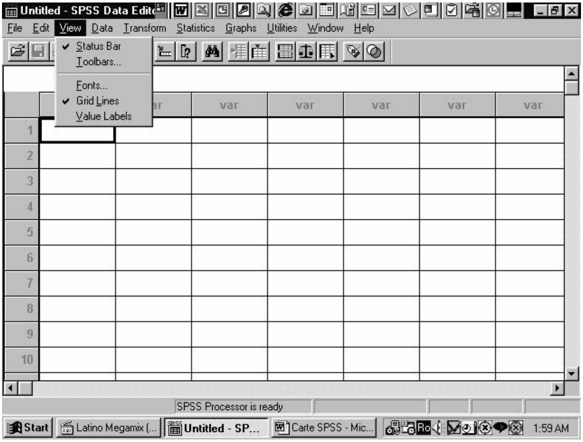
Această fereastră de dialog din meniul de tip *File* permite introducerea de noi date în baza de date, utilizarea editorului de sintaxă, a formei de ieşire a datelor, precum şi deschiderea unor baze de date în SPSS realizate anterior pentru vizualizarea, modificarea sau exportarea datelor stocate. Fereastra ne permite, de asemenea, captarea unei baze de date, citirea datelor în cod ASCI, precum şi afişarea informaţiilor despre datele utilizate.

Asemenea mediului editor Windows, meniul *File* permite salvarea şi imprimarea fişierului ce conţine baza de date.

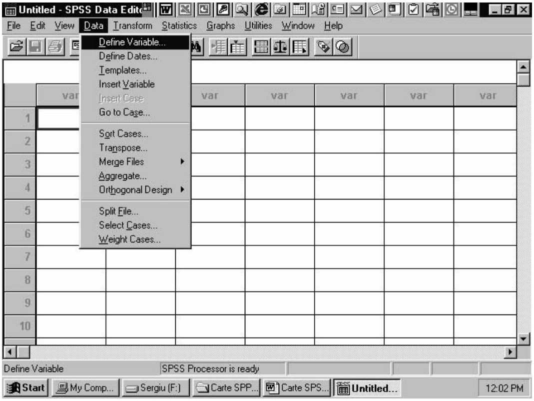
Meniul *Edit* conţine şi în cadrul programului SPSS opţiunile standard: *undo*, *cut*, *copy*, *paste*, *clear*, *find* şi *options*.



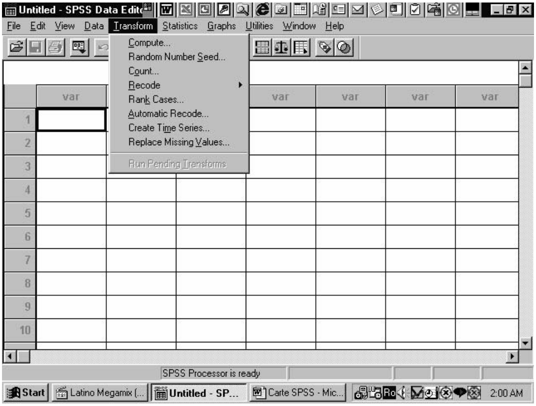
Meniul *View* permite modificarea structurii toolbar-ului, prin ataşarea sau excluderea unor căsuțe de dialog în funcție de dorința utilizatorului. În cadrul acestui meniu se pot modifica deopotrivă şi forma structurii de tip grilă a liniilor precum şi a etichetelor pentru variabilele incluse în baza de date.



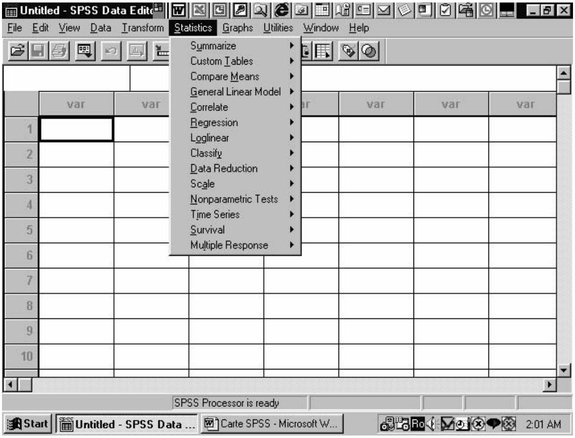
Meniul de tip *Data* cuprinde informații referitoare la definirea variabilelor, a datelor, având şi facilitățile de operare în cadrul bazei de date, aşa cum se poate observa în fereastra de mai jos:



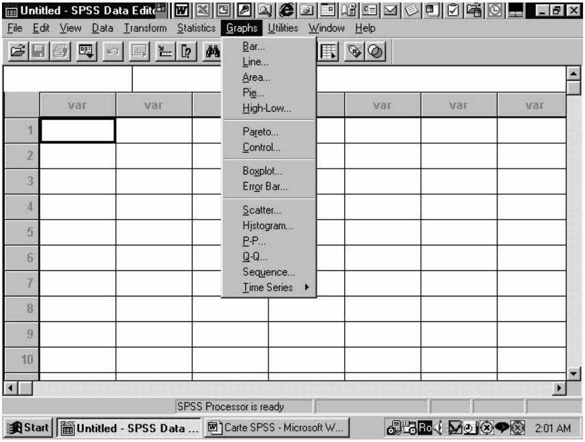
Meniul de tip *Transform* se adresează calculului, ordonării datelor în cadrul bazei de date după o anumită regulă, înregistrării cazurilor de un anumit tip, precum şi înlocuirii unor categorii de valori.



Meniul *Statistics* cuprinde toate statisticile aferente programului SPSS.

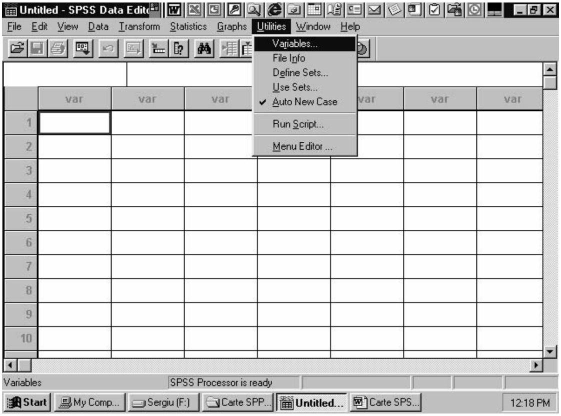


Meniul *Graphics* abordează toate categoriile principale de grafice statistice ce pot fi realizate cu ajutorul programului SPSS.

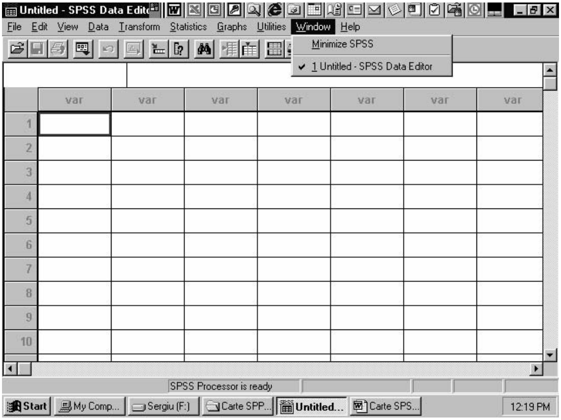


Ultimele meniuri, pe care le vom prezenta doar la nivel general pentru familiarizarea cititorilor cu toate facilitățile programului SPSS, cuprind facilități utilitare aferente bazei de date, facilități referitoare la lucrul cu ferestrele în cadrul programului SPSS, precum şi meniul *Help* pentru furnizarea tuturor informațiilor necesare utilizării programului.

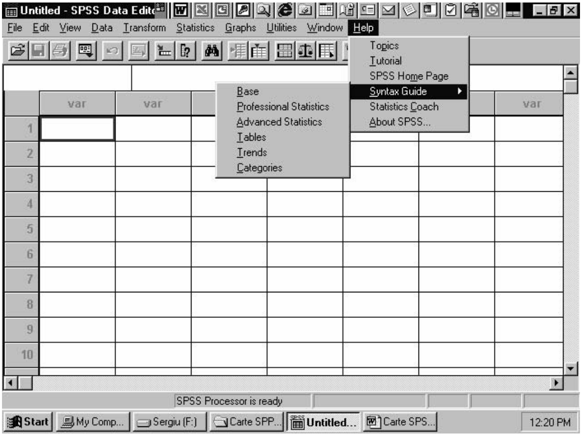
Meniul *Utilities*:



Meniul *Windows*:



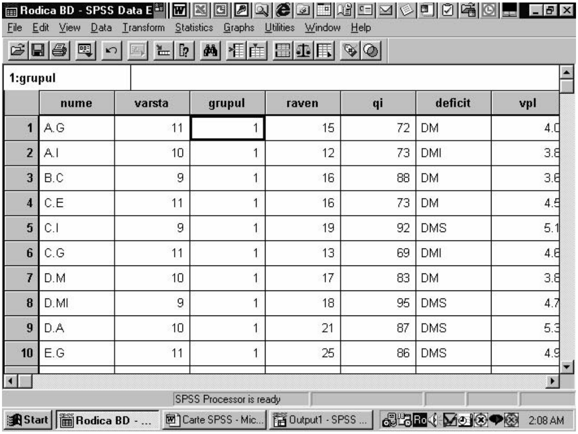
Meniul *Help*:



Pentru ilustrarea procesării datelor statistice, propunem următorul exemplu. Un număr de 30 de subiecți, copii cu deficit intelectual având vârste cuprinse între 9 şi 12 ani, au fost supuşi unei testări psihologice complexe, constituite dintr-o baterie de teste de specialitate (Raven, Portage şi vpl). Subiecții au fost împărțiți în două grupuri de lucru, fiecare dintre acestea fiind format din câte 15 subiecți, şi au beneficiat de metode educaționale diferite. În cadrul testării s-a dorit evidențierea eficienței uneia dintre cele două metode, precum şi alte aspecte legate de similitudinile şi diferențele semnificative înregistrate între cele două grupuri.

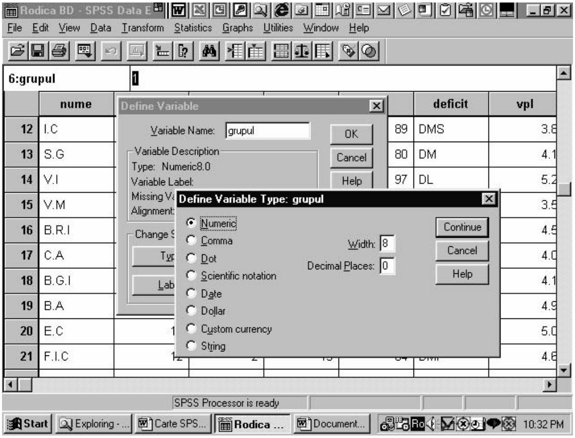
Nume subiect	Vârsta	Grupul	Raven	IQ	Tipul de deficit	Testul vpl	Testul Portage grup 1	Testul Portage grup 2
A.G	11	1	15	72	DM	4.0	60	84
A.I	10	1	12	73	DMI	3.8	61	83
B.C	9	1	16	88	DM	3.6	58	82
C.E	11	1	16	73	DM	4.5	64	81
C.I	9	1	19	92	DMS	5.1	65	82
C.G	11	1	13	69	DMI	4.6	60	89
D.M	10	1	17	83	DM	3.8	61	78
D.MI	9	1	18	95	DMS	4.7	59	79
D.A	10	1	21	87	DMS	5.3	64	86
E.G	11	1	25	86	DMS	4.9	61	80
G.F	10	1	23	92	DL	5.1	60	81
I.C	10	1	21	89	DMS	3.8	59	82
S.G	10	1	15	80	DM	4.1	58	83
V.I	9	1	22	97	DL	5.2	63	86
V.M	11	1	13	69	DMI	3.5	61	85
B.R.I	11	2	16	76	DM	4.5	64	65
C.A	11	2	19	80	DM	4.0	66	64
B.G.I	11	2	18	79	DM	4.1	63	62
B.A	12	2	13	67	DMI	4.9	64	65
E.C	11	2	14	71	DM	5.0	62	61
F.I.C	12	2	13	64	DMI	4.6	65	66
G.M	11	2	21	80	DMS	4.5	62	63
I.N	11	2	19	80	DM	4.4	61	60
I.A	11	2	15	74	DM	5.2	60	60
I.D	11	2	22	84	DMS	4.9	64	65
M.G.C	11	2	11	69	DMI	3.6	65	64
M.R.M	11	2	11	69	DMI	5.0	69	68
S.A	12	2	10	62	DMI	4.0	61	60
T.M	12	2	12	68	DMI	3.7	58	60
Z.M	12	2	12	68	DMI	5.1	64	63

Pentru a analiza statistic aceste informații, se constituie baza de date în SPSS, care va avea următoarea formă:



Valorile înregistrate în cadrul tabelului primar de gestionare a datelor statistice au fost introduse în câmpurile aferente bazei de date din SPSS.

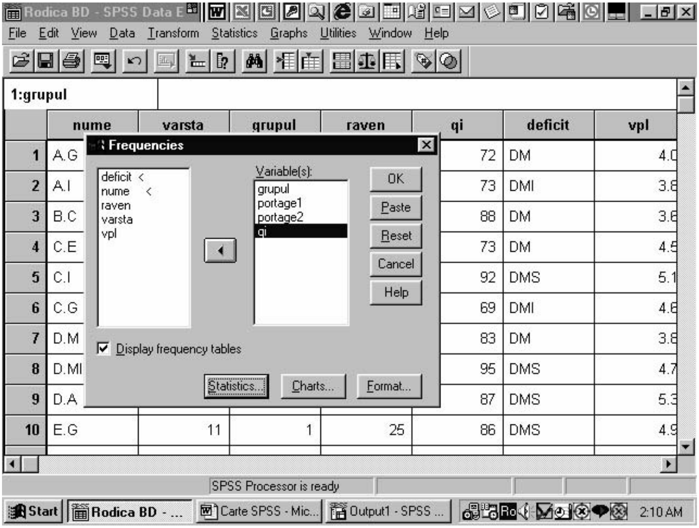
Se definesc apoi variabile înregistrate în capetele coloanelor de studiu, stabilindu-se numele, tipul acestora, lărgimea câmpului, precum şi numărul de zecimale utilizat în descrierea acestor categorii de variabile.



De remarcat este faptul că programul prezintă facilități de exprimare a variabilelor atât sub formă numerică, cât şi sub formă de cuvinte, acestea din urmă neintrând, însă, în calculul valorilor medii ale variabilelor, implicit în analizele statistice de structură.

Într-o primă analiză, vom considera că cei 30 de subiecți fac parte dintr-un eşantion comun, fără să facem o diferențiere în funcție de grupul de lucru din care fac parte aceştia.

Mai întâi se trece la realizarea primelor statistici referitoare la frecvențele înregistrate în câmpurile de valori ale bazei de date. Apelând opțiunea *Frequencies* din meniul *Statistics*, se obține următoarea fereastră de dialog, care cuprinde două câmpuri active:

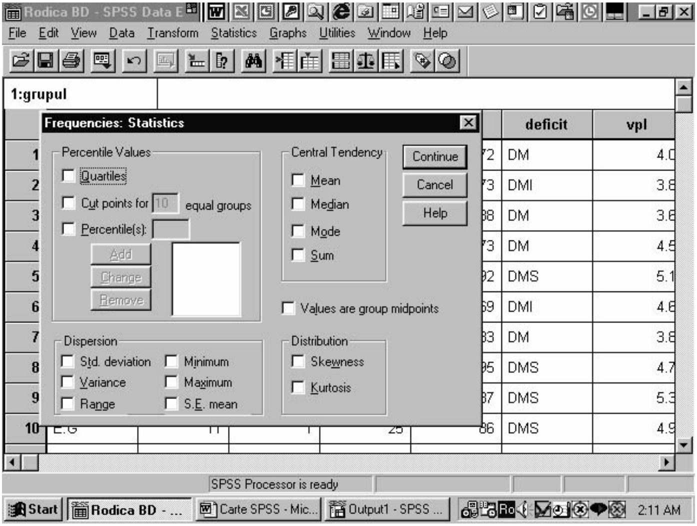


Câmpul din stânga cuprinde toate variabile identificate în cadrul bazei de date realizate, în partea dreaptă fiind transferate cu ajutorul cursorului prezent în figură doar acele variabile ce se doresc a fi prezente în cadrul tabelelor pivot. Se observă că în dreptul variabilelor *deficit* şi *nume* apare

semnul „<“, ceea ce semnifică prezența unor variabile de tip „string“ (în terminologia programului). În general, nu este recomandată asocierea unor astfel de tipuri de variabile cu cele numerice, datorită imposibilității de comparare sau de asociere cu acestea.

În cadrul ferestrei precedente erau prezentate şi facilitățile programului de identificare, alături de frecvențe, a principalilor indicatori statistici, precum şi de reprezentare grafică a acestora.

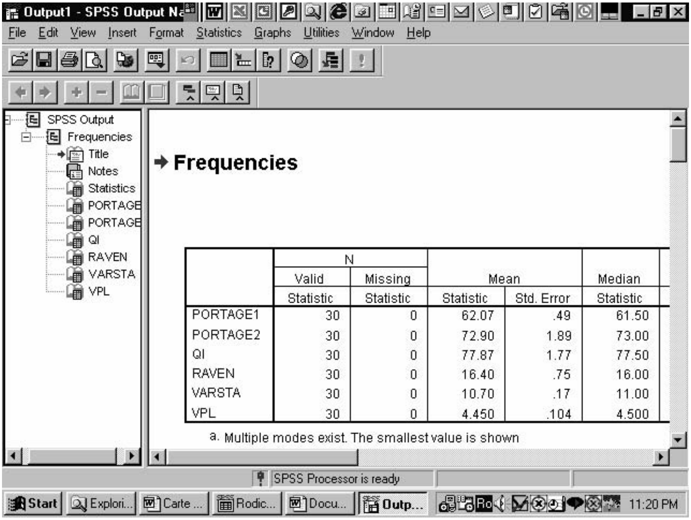
Apelând la statisticile de bază pe care ni le poate oferi SPSS–ul, obținem următoarea fereastră, în care se bifează opțiunile pe care le doreşte utilizatorul, în funcție de necesitățile analizei statistice:



Pot fi calculate valorile percentilelor, indicatorii tendinței centrale (medie, mediană, mod), indicatorii dispersiei (amplitudinea, abaterea standard), eroarea probabilă în raport cu determinarea mediei aritmetice ş.a. Bifând în câmpurile corespunzătoare indicatorii ce se doresc a fi evidențiați în cadrul analizei statistice, se accesează comanda *Continue*, care

va readuce în prim-plan fereastra precedentă, iar după lansarea comenzii *OK*, programul va calcula în mod automat indicatorii selectaţi.

La output, programul SPSS va furniza următorul tip de fereastră segmentată în două suprafeţe distincte: cea din stânga cuprinde numele tabelelor sau al graficelor generate de către program, în partea dreaptă fiind prezentate aceste tabele sau grafice sub formă propriu-zisă:



Din mulţimea de statistici generate de către program vom trece în revistă şi vom comenta doar pe cele mai semnificative.

Primul tabel este centralizatorul principalilor indicatori şi prezintă următoarea structură:

Statistici:
Frequencies

Statistics

	N		Mean		Median	Mode	Std. Deviation	Variance	Range	Minimum	Maximum	Sum	Percentiles		
	Valid	Missing											25.00	50.00	75.00
	Statistic	Statistic	Statistic	Std. Error	Statistic	Statistic	Statistic	Statistic	Statistic	Statistic	Statistic	Statistic	Statistic	Statistic	Statistic
PORTAC	30	0	62.07	.49	61.50	61[a]	2.66	7.10	11	58	69	1862	60.00	61.50	64.00
PORTAC	30	0	72.90	1.89	73.00	60	10.35	107.20	29	60	89	2187	63.00	73.00	82.25
QI	30	0	77.87	1.77	77.50	69[a]	9.72	94.40	35	62	97	2336	69.00	77.50	86.25
RAVEN	30	0	16.40	.75	16.00	13	4.09	16.73	15	10	25	492	13.00	16.00	19.50
VARSTA	30	0	10.70	.17	11.00	11	.92	.84	3	9	12	321	10.00	11.00	11.00
VPL	30	0	4.450	.104	4.500	3.8[a]	.572	.327	1.8	3.5	5.3	133.5	3.950	4.500	5.000

a. Multiple modes exist. The smallest value is shown

În prima coloană sunt prezentate frecvențele valide luate în calcul de către program, în cea de-a doua fiind identificate eventualele frecvențe lipsă, drept urmare a neexistenței unei valori într-un câmp al bazei de date. Într-un astfel de context, se sugerează utilizatorilor verificarea acestei coloane şi introducerea valorilor lipsă în câmpurile aferente, în sensul obținerii unor statistici de acuratețe deosebită. În continuare, programul identifică frecvențele de apariție a variabilelor numerice (scorurile înregistrate în cadrul testului Portage în cadrul grupurilor 1 şi 2 înainte şi după aplicarea strategiilor educaționale).

GRUPUL

		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	1	15	50.0	50.0	50.0
	2	15	50.0	50.0	100.0
	Total	30	100.0	100.0	
Total		30	100.0		

PORTAGE1

		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	58	3	10.0	10.0	10.0
	59	2	6.7	6.7	16.7
	60	4	13.3	13.3	30.0
	61	6	20.0	20.0	50.0
	62	2	6.7	6.7	56.7
	63	2	6.7	6.7	63.3
	64	6	20.0	20.0	83.3
	65	3	10.0	10.0	93.3
	66	1	3.3	3.3	96.7
	69	1	3.3	3.3	100.0
	Total	30	100.0	100.0	
Total		30	100.0		

PORTAGE2

		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	60	4	13.3	13.3	13.3
	61	1	3.3	3.3	16.7
	62	1	3.3	3.3	20.0
	63	2	6.7	6.7	26.7
	64	2	6.7	6.7	33.3
	65	3	10.0	10.0	43.3
	66	1	3.3	3.3	46.7
	68	1	3.3	3.3	50.0
	78	1	3.3	3.3	53.3
	79	1	3.3	3.3	56.7
	80	1	3.3	3.3	60.0
	81	2	6.7	6.7	66.7
	82	3	10.0	10.0	76.7
	83	2	6.7	6.7	83.3
	84	1	3.3	3.3	86.7
	85	1	3.3	3.3	90.0
	86	2	6.7	6.7	96.7
	89	1	3.3	3.3	100.0
	Total	30	100.0	100.0	
Total		30	100.0		

Tabelele de mai sus prezintă cel mai simplu mod de definire a variabilelor, fără a fi necesară o relaţie de condiţionare suplimentară. Dacă această condiţionare este totuşi necesară în cadrul investigaţiei, atunci se poate apela la o formă mai complexă de prezentare a frecvenţelor, în speţă la frecvenţele de tip *explore* (selectate prin comenzile *statistics–frequencies–explore*).

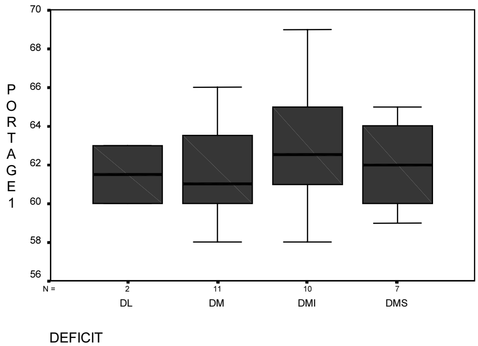
Să considerăm, de exemplu, variabila dependentă *grad de deficit mintal* al fiecăruia dintre subiecţi; obţinem următoarea situaţie :

DEFICIT

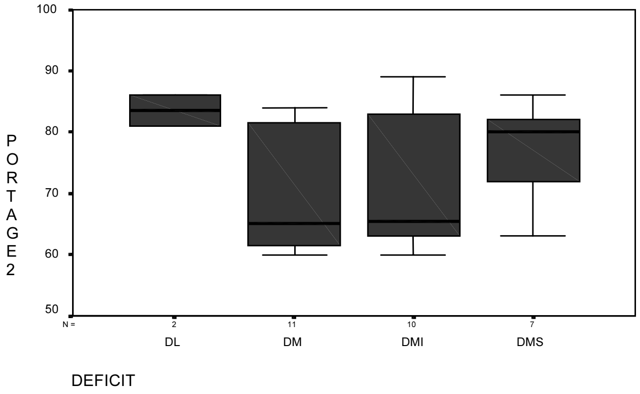
Case Processing Summary

		Cases					
		Valid		Missing		Total	
	DEFICIT	N	Percent	N	Percent	N	Percent
PORTAGE1	DL	2	100.0%	0	.0%	2	100.0%
	DM	11	100.0%	0	.0%	11	100.0%
	DMI	10	100.0%	0	.0%	10	100.0%
	DMS	7	100.0%	0	.0%	7	100.0%
PORTAGE2	DL	2	100.0%	0	.0%	2	100.0%
	DM	11	100.0%	0	.0%	11	100.0%
	DMI	10	100.0%	0	.0%	10	100.0%
	DMS	7	100.0%	0	.0%	7	100.0%

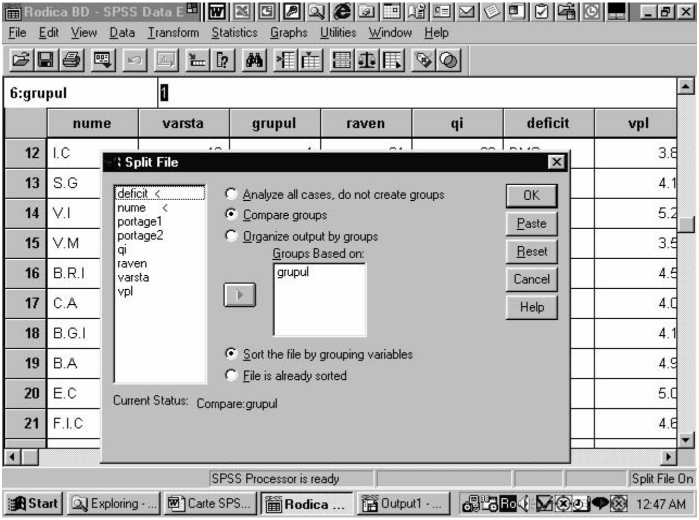
Pentru testul Portage aplicat înainte de diferenţierea strategiilor educaţionale se obţine următoarea evoluţie a valorilor înregistrate de către subiecţi în funcţie de tipul de deficit:



La a doua aplicare a testului Portage (după diferențierea strategiilor educaționale în cadrul unuia dintre grupuri), rezultatele înregistrate de către subiecți prezintă următoarea evoluție:



Până acum am considerat evoluția întregului eşantion format din cei 30 de subiecți la cele două aplicări ale testului Portage, fără a realiza nici un fel de diferență între aceştia (dacă fac parte din primul sau din al doilea grup de lucru). Dacă se doreşte observarea evoluției în paralel a performanțelor înregistrate în cadrul fiecăruia dintre cele două grupuri la aplicarea succesivă a testului Portage (înainte şi după diferențierea strategiilor educaționale) este necesară utilizarea funcției *Split file* din meniul *Data*.



În cadrul aplicării opțiunii *Split file* avem două posibilități de organizare a datelor. Prima dintre acestea se referă la realizarea de comparații, având drept variabilă independentă grupul, iar cea de-a doua ne va oferi posibilitatea de a evidenția în mod separat performanțele înregistrate la nivel individual de fiecare grup în parte. Alegând opțiunea de a compara, de exemplu, rezultatele obținute de către subiecți la aplicarea pentru prima dată a testului Portage, obținem următoarea situație:

PORTAGE 1

Frequency

GRUPUL			Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
1	Valid	58	2	13.3	13.3	13.3
		59	2	13.3	13.3	26.7
		60	3	20.0	20.0	46.7
		61	4	26.7	26.7	73.3
		63	1	6.7	6.7	80.0
		64	2	13.3	13.3	93.3
		65	1	6.7	6.7	100.0
		Total	15	100.0	100.0	
	Total		15	100.0		
2	Valid	58	1	6.7	6.7	6.7
		60	1	6.7	6.7	13.3
		61	2	13.3	13.3	26.7
		62	2	13.3	13.3	40.0
		63	1	6.7	6.7	46.7
		64	4	26.7	26.7	73.3
		65	2	13.3	13.3	86.7
		66	1	6.7	6.7	93.3
		69	1	6.7	6.7	100.0
		Total	15	100.0	100.0	
	Total		15	100.0		

Evident, în mod analog, se obține un tabel care prezintă evoluția rezultatelor subiecților la cea de-a doua aplicare a testului Portage.

Până acum nu am realizat decât o evidențiere a scorurilor, fără a putea preciza dacă există similitudini sau diferențe semnificative între rezultatele înregistrate. Pentru a evidenția similitudinile în aplicarea celor două teste, vom apela funcțiile de corelație lineare şi non-lineare, pentru a putea stabili gradul de legătură dintre variabile.

Aplicând testul de corelație Pearson pentru eşantionul format din cei 30 de subiecți, obținem următoarea situație:

Correlations

		PORTAGE 1	PORTAGE 2
Pearson Correlation	PORTAGE 1	1.000	-.296
	PORTAGE 2	-.296	1.000
Sig. (2-tailed)	PORTAGE 1	.	.112
	PORTAGE 2	.112	.
N	PORTAGE 1	30	30
	PORTAGE 2	30	30

Tabelul ne indică o corelație foarte slabă între variabile, aceasta întâlnindu-se doar în 11,2% din totalul de cazuri. Coeficientul de corelație negativ (–.296) arată o foarte uşoară relație de dependență inversă (creşterea valorilor unui set de variabile, se realizează în concordanță cu descreşterea valorilor pentru cel de-al doilea tip de variabile).

Apelând la metodele non-parametrice de corelație, se calculează în mod analog coeficienții τ–b al lui Kendall respectiv coeficientul ρ al lui Spearman.

Nonparametric Correlations

Correlations

			PORTAGE1	PORTAGE2
Kendall tau_b	Correlation Coefficient	PORTAGE 1	1.000	-.077
		PORTAGE 2	-.077	1.000
	Sig (2-tailed)	PORTAGE 1	.	.574
		PORTAGE 2	.574	.
	N	PORTAGE 1	30	30
		PORTAGE 2	30	30
Spearman's rho	Correlation Coefficient	PORTAGE 1	1.000	-.162
		PORTAGE 2	-.162	1.000
	Sig (2-tailed)	PORTAGE 1	.	.391
		PORTAGE 2	.391	.
	N	PORTAGE 1	30	30
		PORTAGE 2	30	30

Dacă vom dori să analizăm corelația variabilelor după grupul de lucru, apelând ca în cadrul exemplelor de mai sus la funcția *Split file*, vom obține următoarele situații:

Correlations

GRUPUL			PORTAGE1	PORTAGE2
1	Pearson Correlation	PORTAGE 1	1.000	.143
		PORTAGE 2	.143	1.000
	Sig. (2-tailed)	PORTAGE 1	.	.612
		PORTAGE 2	.612	.
	N	PORTAGE 1	15	15
		PORTAGE 2	15	15
2	Pearson Correlation	PORTAGE 1	1.000	.897 **
		PORTAGE 2	.897 **	1.000
	Sig. (2-tailed)	PORTAGE 1	.	.000
		PORTAGE 2	.000	.
	N	PORTAGE 1	15	15
		PORTAGE 2	15	15

**. Correlation is significant at the 0.01 level (2-tailed).

Dacă pentru grupul 1 nu se înregistrează diferențe semnificative între prima aplicare şi cea de-a doua aplicare a testului Portage, în cadrul grupului numărul 2 se observă diferențe înalt semnificative (în valoare absolută .000; cu alte cuvinte sunt practic 0% şanse să ne putem înşela în ipoteza conform căreia nu s-ar înregistra diferențe semnificative). Acest lucru se observă şi din valoarea deosebit de ridicată a coeficientului Pearson .897 (având în vedere faptul că 1 este cea mai ridicată valoare ce se poate înregistra).

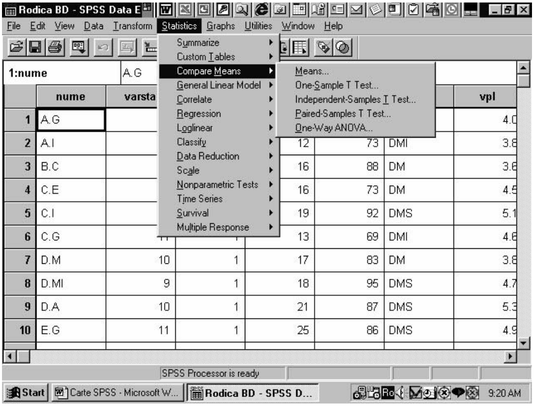
Aceste diferențe semnificative în cadrul grupului numărul 2 se pot observa şi prin calcularea altor coeficienți de corelație.

Correlations

GRUPUL				PORTAGE1	PORTAGE2
1	Kendall's tau_b	Correlation Coefficient	PORTAGE 1	1.000	.094
			PORTAGE 2	.094	1.000
		Sig. (2-tailed)	PORTAGE 1	.	.647
			PORTAGE 2	.647	.
		N	PORTAGE 1	15	15
			PORTAGE 2	15	15
	Spearman's rho	Correlation Coefficient	PORTAGE 1	1.000	.115
			PORTAGE 2	.115	1.000
		Sig. (2-tailed)	PORTAGE 1	.	.683
			PORTAGE 2	.683	.
		N	PORTAGE 1	15	15
			PORTAGE 2	15	15
2	Kendall's tau_b	Correlation Coefficient	PORTAGE 1	1.000	.768**
			PORTAGE 2	.768**	1.000
		Sig. (2-tailed)	PORTAGE 1	.	.000
			PORTAGE 2	.000	.
		N	PORTAGE 1	15	15
			PORTAGE 2	15	15
	Spearman's rho	Correlation Coefficient	PORTAGE 1	1.000	.883**
			PORTAGE 2	.883**	1.000
		Sig. (2-tailed)	PORTAGE 1	.	.000
			PORTAGE 2	.000	.
		N	PORTAGE 1	15	15
			PORTAGE 2	15	15

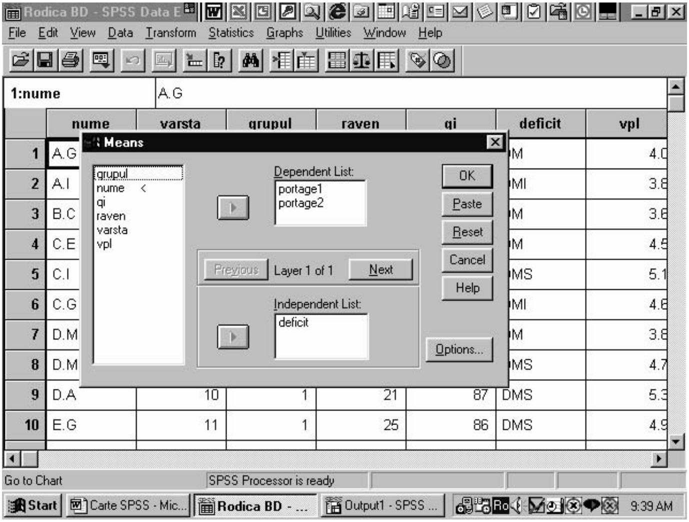
**. Correlation is significant at the .01 level (2-tailed).

În cadrul programului SPSS, o modalitate de testare a diferențelor semnificative dintre mediile a două eşantioane se realizează prin intermediul testului *t-Student*. Aşa cum se poate observa şi în fereastra următoare, există mai multe modalități de testare a diferențelor semnificative:



Prima dintre facilităţile operaţionale puse la dispoziţie de program se referă la aplicaţia *Compare Means – Means*, prima dintre cele întâlnite în cadrul barei de derulare a meniului *Statistics.* Acest tip de test este utilizat atunci când se doreşte evidenţierea mediilor înregistrate de către două eşantioane distincte în funcţie de o variabilă independentă predefinită.

În exemplul următor, ne propunem să evidenţiem mediile înregistrate în cadrul colectivităţii formate din cei 30 de subiecţi la aplicarea testului Portage, având drept variabilă independentă gradul de deficit mintal al subiecţilor. Pentru a putea realiza o astfel de analiză, programul ne oferă drept interfaţă următoarea fereastră de dialog, în care se observă clar posibilităţile de alegere a variabilelor dependentă şi independentă în funcţie de preferinţele de analiză ale utilizatorului.



În urma selectării variabilelor dependentă şi independentă, SPSS-ul va prezenta în partea rezervată prezentării rezultatelor următorul raport:

Means

Report

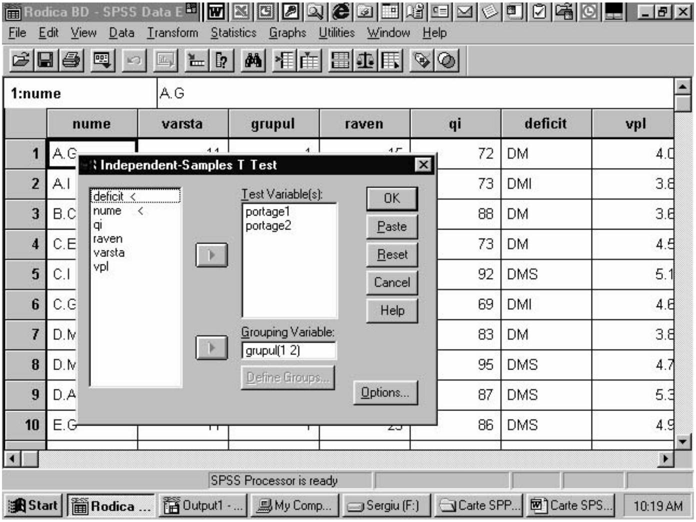
DEFICIT		PORTAGE1	PORTAGE2
DL	Mean	61.50	83.50
	N	2	2
	Std. Deviation	2.12	3.54
DM	Mean	61.55	70.91
	N	11	11
	Std. Deviation	2.54	10.44
DMI	Mean	62.80	70.30
	N	10	10
	Std. Deviation	3.19	10.98
DMS	Mean	62.00	76.71
	N	7	7
	Std. Deviation	2.45	8.98
Total	Mean	62.07	72.90
	N	30	30
	Std. Deviation	2.66	10.35

După cum se poate observa, această facilitate ne permite doar evidențierea mediilor înregistrate la aplicarea celor două teste Portage (generând şi informații asupra gradului de împrăştiere a datelor în jurul valorii centrale prin intermediul indicatorului de dispersie), fără a putea testa dacă aceste diferențe sunt semnificative sau nu. Acest tip de analiză este realizat cu ajutorul testului *t-Student*, care, în cadrul programului SPSS (în funcție de domeniul de aplicare), prezintă trei funcții distincte:

1. **Compararea independentă a eşantioanelor** (*Independent – samples t test*): compară mediile înregistrate pentru o singură variabilă în cazul a două eşantioane (sau grupuri de cazuri).
2. **Compararea dependentă a eşantioanelor** (*Paired –samples t test –dependent t test*): compară mediile înregistrate pentru două variabile din cadrul aceluiaşi eşantion.
3. **Compararea valorii pentru un eşantion**: compară media pentru o variabilă înregistrată la nivel experimental cu o medie teoretică.

În continuare, vom efectua analiza diferențelor semnificative pentru toate cele trei situații distincte, în cadrul exemplului prezentat anterior.

1. Compararea independentă a eşantioanelor (*Independent – samples t test*). Aşa cum este prezentat şi în cadrul următoarei ferestre de dialog, dorim să evidențiem diferențele semnificative înregistrate la aplicarea succesivă a testelor Portage pentru fiecare dintre grupurile de studiu. În acest sens, vor fi comparate mediile grupurilor 1 şi 2 la prima şi respectiv la cea de-a doua aplicare a testului Portage.



În urma procesării datelor, obținem următorul tabel:

Independent Samples Test

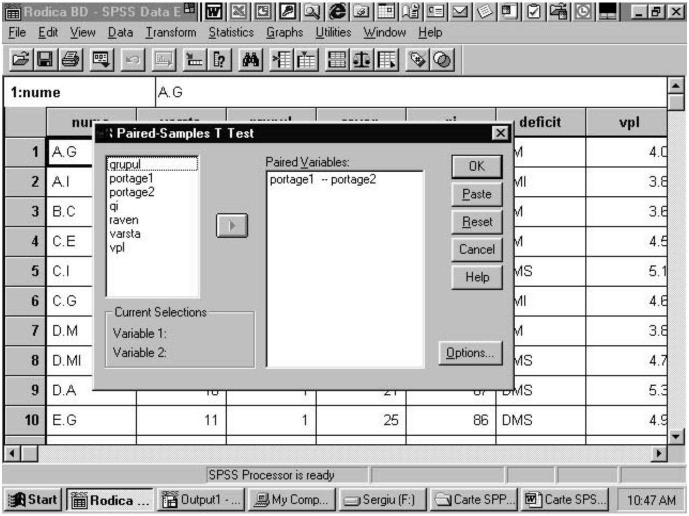
		Levene's Test for Equality of Variances		t-test for Equality of Means						
									95% Confidence Interval of the Mean	
		F	Sig.	t	df	Sig. (2-tailed)	Mean Difference	Std. Error Difference	Lower	Upper
PORTAGE1	Equal variances assumed	.493	.488	-2.539	28	.017	-2.27	.89	-4.10	-.44
	Equal variances not assumed			-2.539	26.923	.017	-2.27	.89	-4.10	-.43
PORTAGE2	Equal variances assumed	.098	.756	19.767	28	.000	19.67	.99	17.63	21.70
	Equal variances not assumed			19.767	27.429	.000	19.67	.99	17.63	21.71

Dacă la prima aplicare a testului Portage se observă diferenţe valorice între grupurile 1 şi 2 pe care nu le putem considera semnificative (nivelul de semnificaţie este .017 pentru un nivel de încredere de 95%), după aplicarea strategiilor educaţionale se observă diferenţe valorice înalt semnificative (nivelul de semnificaţie este maxim, .000, pentru un nivel de încredere de 95%). Această analiză statistică ne poate conduce la concluzia că strategiile educaţionale aplicate au avut un succes real pentru grupul ce a beneficiat de o astfel de aplicaţie.

De notat că în primele coloane tabelul prezintă testul Levene pentru verificarea diferenţelor înregistrate între dispersiile scorurilor înregistrate în cadrul celor două grupuri de subiecţi. Sunt prezentate în următoarele coloane valorile variabilei *t* calculate pentru fiecare grup în parte, gradele de libertate ale sistemului (df — *degrees of freedom*), valorile diferenţelor înregistrate între medii, precum şi erorile standard înregistrate în estimarea mediilor. Cea mai importantă coloană a tabelului conţine concluziile asupra nivelului de semnificaţie al testului (sig. 2-*tailed*, adică nivel de semnificaţie pentru teste bilaterale). Cu cât valoarea calculată este mai apropiată de cea considerată drept pragul maximal al semnificativităţii, .000, cu atât diferenţele înregistrate între mediile grupurilor sunt mai evidente.

2. Compararea dependentă a eşantioanelor (*Paired –samples t test– dependent t test*). În cadrul acestui test vom evidenţia diferenţele semnifi-

cative la aplicarea testului Portage în două situații: considerând într-o primă fază eşantionul de 30 de subiecți, urmând apoi, cu ajutorul funcției *split file,* să realizăm o analiză după scorurile înregistrate în cadrul grupurilor.



În prima situație, programul va considera că există un singur eşantion şi că cele două variabile sunt scorurile înregistrate la testele Portage 1, respectiv Portage 2, pe care le compară între ele. Rezultatele obținute sunt prezentate în cadrul următorului tabel:

Paired Samples Test

	Paired Differences					t	df	Sig. (2-tailed)
	Mean	Std. Deviation	Std. Error Mean	95% Confidence erval of the Differen Lower	Upper			
Pair 1 PORTAGE - PORTAGE	-10.83	11.43	2.09	-15.10	-6.57	-5.192	29	.000

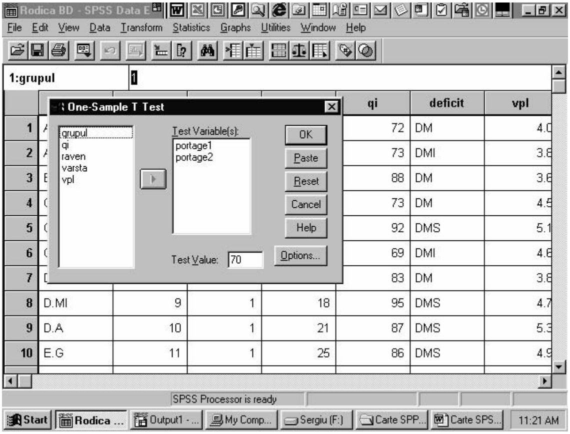
Se confirmă şi în această situație existența diferențelor înalt semnificative (.000) dintre cele două categorii de variabile.

Dorind să realizăm acelaşi tip de analiză pentru cele două variabile, de data aceasta realizând *split file* după variabila grup, obținem următorul tabel de date:

Paired Samples Test

GRUPUL			Paired Differences					t	df	Sig. (2-tailed)
			Mean	Std. Deviation	Std. Error Mean	95% Confidence Interval of the Difference Lower	Upper			
1	Pair 1	PORTAGE1 - PORTAGE2	-21.80	3.38	.87	-23.67	-19.93	-24.944	14	.000
2	Pair 1	PORTAGE1 - PORTAGE2	.13	1.19	.31	-.52	.79	.435	14	.670

3. Compararea valorii pentru un eşantion este utilizată în situația în care considerăm o medie teoretică postulată pentru testul Portage şi dorim să comparăm această valoare cu valorile experimentale pe care le cunoaştem deja din analizele anterioare.



După cum se poate observa şi din fereastra prezentată, se alege valoarea teoretică de 70 de puncte pe scala aferentă testului respectiv. Rezultatele obţinute în urma procesării datelor statistice sunt prezentate în următoarele tabele:

One-Sample Statistics

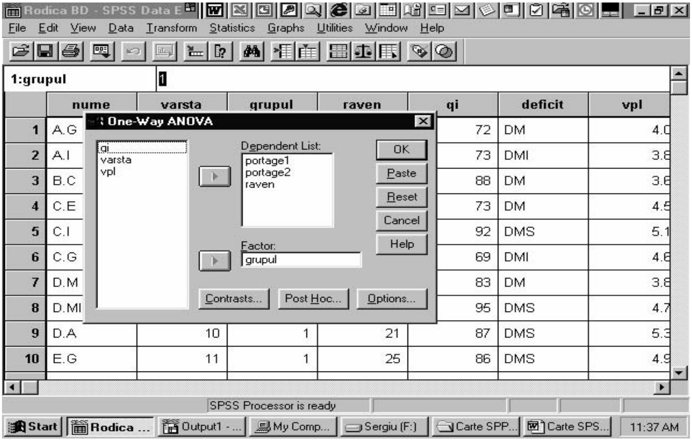
	N	Mean	Std. Deviation	Std. Error Mean
PORTAGE1	30	62.07	2.66	.49
PORTAGE2	30	72.90	10.35	1.89

One-Sample Test

	Test Value = 70					
	t	df	Sig. (2-tailed)	Mean Difference	95% Confidence nterval of the Differenc Lower	Upper
PORTAGE1	-16.309	29	.000	-7.93	-8.93	-6.94
PORTAGE2	1.534	29	.136	2.90	-.97	6.77

Dacă la prima aplicare a testului Portage diferenţele înregistrate erau considerate semnificative în raport cu media propusă (62.07 puncte experimentale în raport cu cele 70 propuse teoretic), la a doua aplicare a testului Portage după aplicarea strategiilor educaţionale media de punctaj a subiecţilor a ajuns la 72.9 puncte (depăşind uşor şi media postulată teoretic), ceea ce concluzionează asupra validităţii metodelor aplicate.

Pentru analiza diferenţelor semnificative înregistrate între mediile a cel puţin 3 eşantioane sau a comparării a cel puţin 3 categorii de variabile distincte este utilizat testul ANOVA.



Presupunând că dorim să realizăm o identificare a diferențelor semnificative dintre scorurile înregistrate de către subiecți la cele două teste Portage şi testul Raven, având drept factor variabila *grup*, obținem următoarea situație prezentată în tabel.

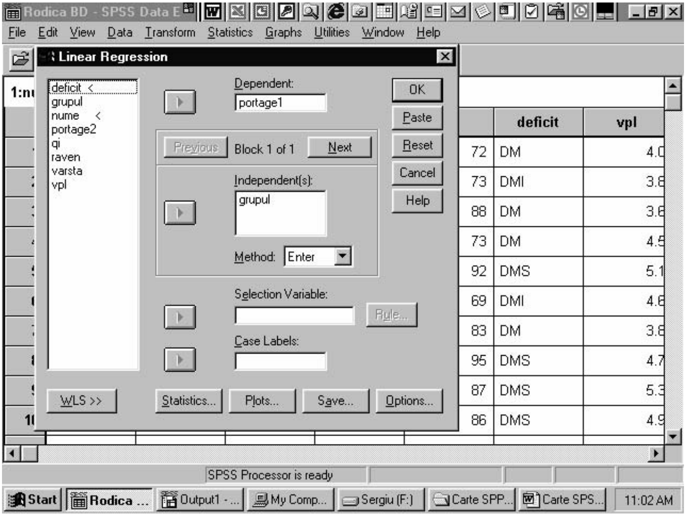
ANOVA

		Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
PORTAGE1	Between Groups	38.533	1	38.533	6.448	.017
	Within Groups	167.333	28	5.976		
	Total	205.867	29			
PORTAGE2	Between Groups	2900.833	1	2900.833	390.747	.000
	Within Groups	207.867	28	7.424		
	Total	3108.700	29			
RAVEN	Between Groups	53.333	1	53.333	3.458	.073
	Within Groups	431.867	28	15.424		
	Total	485.200	29			

Calculul coeficientului F (al lui Fischer) ne arată că diferențele înalt semnificative .000 între variațiile intra-grupuri, respectiv între-grupuri, se observă doar la a doua aplicare a testului Portage pentru grupurile 1 şi 2. Aceste variații mari ale scorurilor se traduc prin creşterea performanțelor şcolare în urma aplicării strategiilor educaționale. De remarcat este faptul că aceste variații semnificative nu sunt observate la prima aplicare a testului Portage pentru cele două grupuri (.017), respectiv la aplicarea testului Raven (.073 — se observă o omogenitate mai mare în răspuns).

Pentru a întregi analiza statistică, propunem în final aplicarea testului de regresie lineară pentru a putea evidenția tendința datelor de evoluție în jurul valorii medii.

Să presupunem că dorim să studiem evoluția subiecților la aplicarea testului Portage 1, considerând drept variabilă independentă grupul de studiu.



Rezultatele obținute în urma procesării datelor statistice prezintă următoarea formă:

ANOVA[b]

Model		Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
1	Regression	38.533	1	38.533	6.448	.017[a]
	Residual	167.333	28	5.976		
	Total	205.867	29			

a. Predictors: (Constant), GRUPUL

b. Dependent Variable: PORTAGE1

Calculul coeficientului de regresie β aferent testului statistic:

Coefficients[a]

Model		Unstandardized Coefficients		Standardized Coefficients	t	Sig.
		B	Std. Error	Beta		
1	(Constant)	58.667	1.411		41.566	.000
	GRUPUL	2.267	.893	.433	2.539	.017

a. Dependent Variable: PORTAGE1

Pentru aplicarea testului Portage 1 se poate constata confirmarea apariției diferențelor semnificative, ca şi în cadrul analizelor precedente.

EXERCIŢII ŞI PROBLEME*

1 INTRODUCERE

1.1 Următorii itemi sunt selectaţi dintr-o anchetă de opinie publică. Indicaţi nivelul de măsură pentru fiecare item.

a. Ocupaţia dvs. _________
b. Credeţi că, faţă de orice alt copil, şansele copilului dvs. de a creşte în această lume sunt egale, mai mici sau mai mari?
   Egale __________ Mai mici __________
   Mai mari _______ Nu ştiu ___________
c. Ultima formă de învăţământ absolvită:
   Învăţământ obligatoriu __________
   Şcoală profesională ____________
   Liceu __________
   Şcoală postliceală ______________
   Învăţământ superior ____________
   Cursuri postuniversitare _________
d. Dacă vi s-ar cere să folosiţi una dintre următoarele denumiri pentru categoria dvs. socială, pe care aţi alege-o?
   Inferioară __________ Medie __________
   Superioară _________ Nu ştiu _________
e. Vârsta (în ani împliniţi) __________
f. Când lucrurile nu vă merg bine, cine credeţi că poartă vina?
   Mai curând eu __________ Mai curând alţii __________
   Atât alţii, cât şi eu _______ Nu ştiu __________

1.2 Descrieţi pe scurt o modalitate de măsurare pentru fiecare dintre variabilele din lista de mai jos. Ce nivel de măsură se obţine prin modalitatea de măsurare pe care aţi ales-o? Există şi alte modalităţi de

---

* Pentru cele marcate cu asterisc sunt date soluţii sau indicaţii de rezolvare.

a măsura variabila, prin care s-ar obţine nivele de măsură diferite? Dacă da, specificaţi care ar fi acestea.

Naţionalitate	Venit
Înălţime	Onestitate
Număr de copii	Distanţa de la facultate până acasă
Produs Naţional Brut	Număr de medici la mia de locuitori

1.3 În 1972, un grup de cercetători francezi au realizat o cercetare privind mobilitatea sistemului social din Franţa. Variabila *categorie socioprofesională* a fost măsurată după cum urmează: 1. Salariaţi agricoli, 2. Agricultori, 3. Muncitori şi personal de serviciu, 4. Funcţionari, 5. Patroni de industrie şi comerţ, 6. Cadre medii, 7. Cadre superioare. La ce nivel a fost măsurată variabila? Variabila a fost măsurată corect? Dacă nu, indicaţi erorile comise.

2 PREZENTAREA DATELOR STATISTICE

2.1 Tabelul următor prezintă numărul de studenţi înscrişi pe domenii de studiu la Universitatea X:

Domeniul	Băieţi	Fete
Ştiinţe juridice	117	83
Ştiinţe sociale	97	132
Ştiinţe umaniste	72	20
Ştiinţe economice	156	139
Medicină	3	35
Ştiinţe inginereşti	30	15

a. Care este procentul de băieţi înscrişi la Ştiinţe sociale?
b. Care este proporţia de băieţi înscrişi la Medicină?
c. Care este proporţia de fete înscrise la Ştiinţe economice?
d. Care este procentul de studenţi înscrişi la Ştiinţe sociale?
e. În cazul Ştiinţelor juridice, care este raportul dintre numărul de băieţi şi numărul de fete?

f. Care este procentul de băieţi înscrişi la Universitatea X?
g. Care este raportul dintre numărul de studenţi înscrişi la Ştiinţe juridice faţă de numărul de studenţi înscrişi la Ştiinţe economice?
h. Care este raportul dintre numărul de băieţi şi numărul de fete pe întreaga universitate?
i. Care este raportul dintre numărul de fete înscrise la Ştiinţe economice faţă de numărul de fete înscrise la Medicină?
j. Care este proporţia de băieţi înscrişi la Ştiinţe inginereşti?

2.2 50 de persoane au completat un chestionar care măsoară atitudinea faţă de violenţa interpersonală. Respondenţii cu scoruri înalte consideră că în multe situaţii o persoană este îndreptăţită să folosească forţa fizică împotriva altei persoane. Respondenţii cu scoruri joase consideră că în foarte puţine situaţii se justifică folosirea forţei fizice împotriva altei persoane. Datele obţinute sunt următoarele:

52	47	17	8	92
53	23	28	9	90
17	63	17	17	23
19	66	10	20	47
20	66	5	25	17
10	82	90	40	45
8	91	82	52	20
75	32	75	60	60
80	30	70	65	52
90	29	70	66	55

a. Construiţi o distribuţie de frecvenţe pentru a prezenta aceste date.
b. Care sunt limitele reale ale intervalelor de clasă?
c. Adăugaţi coloane pentru procente, frecvenţe cumulate şi procente cumulate.
d. Construiţi o histogramă şi un poligon de frecvenţe pentru aceste date.

e. Redactați un scurt comentariu asupra acestei distribuții de scoruri.

2.3 Într-un studiu grafologic, a fost făcută o analiză a lungimii cuvintelor folosite de o persoană. Datele obținute sunt următoarele:

Lungimea cuvintelor	*f*
1–2	224
3–4	440
5–6	180
7–8	102
9–10	38
11–12	11
13 şi mai lungi	5

Construiți o histogramă, un poligon de frecvențe şi o ogivă pentru aceste date.

3 MĂRIMILE TENDINȚEI CENTRALE ŞI ALE DISPERSIEI

3.1* O grupă de 25 de studenți au participat la un test psihologic. Scorurile următoare reprezintă numărul de încercări cerute pentru completarea unui test de memorie:

12	10	12	11	6
15	14	17	9	12
13	8	7	15	14
15	18	19	14	10
14	14	16	8	9

a. Calculați media aritmetică, mediana şi modul.

b. Calculați amplitudinea, amplitudinea intercuartilică şi abaterea standard.

c. Calculați decilele *D*2 şi *D*9 şi percentilele *P*14 şi *P*21.

3.2* La o testare psihologică au participat 51 de subiecți. În urma aplicării testului matricii progresive RAVEN, au fost înregistrate următoarele rezultate, care reprezintă numărul de erori provenite din potrivirea răspunsurilor în mod incorect în matrice:

Număr de erori	*f*
3–6	3
7–10	5
11–14	9
15–18	16
19–22	10
23–26	4
27–30	3
31–34	1

Calculați media aritmetică, mediana şi abaterea standard pentru aceste date.

3.3 Calculați media aritmetică ponderată a următoarelor două grupe de date:
G1: 9, 6, 8, 8, 1, 1, 3, 3, 6, 5, 1, 5, 7, 8, 3, 5, 2, 3, 6, 8
G2: 7, 5, 1, 4, 7, 4, 2, 4, 2, 5, 5, 6, 6, 7,4, 4, 1, 4

3.4 12 subiecți au participat la un test de inteligență non-verbală — proba de trasaj Thurstone. Următorul tabel prezintă numărul de greşeli înregistrate de fiecare subiect la proba de trasaj liber:

Subiectul	Număr de greşeli
1	7
2	8
3	10
4	6
5	5
6	9
7	7
8	7
9	8
10	6
11	9
12	8

Calculați abaterea medie şi coeficientul de variație pentru aceste date.

3.5* Un colectiv de 50 de studenți au luat decizii în legătură cu trei probleme. Prima este cea a materiilor opționale de studiu, unde au avut 5 posibilități de alegere, cea de-a doua problemă este repartizarea pe grupe de lucru la laborator, tot cu 5 opțiuni, a treia problemă fiind studierea limbilor străine, cu 4 posibilități de alegere. Rezultatele deciziilor sunt prezentate în următorul tabel:

	Varianta A	Varianta B	Varianta C	Varianta D	Varianta E
Problema 1	12	8	10	5	15
Problema 2	13	7	7	12	11
Problema 3	16	9	10	15	–

Folosiți indicele variației calitative (IQV) pentru a stabili omogenitatea deciziilor în privința celor trei probleme.

3.6 Un grup de 57 de cercetători au avut de ales pentru două domenii distincte D1 şi D2 între 4 şi 5 teme de cercetare, repartizarea finală fiind următoarea:

	Tema A	Tema B	Tema C	Tema D	Tema E
Domeniul 1	12	8	10	5	15
Domeniul 2	13	7	7	12	11

Stabiliți domeniul în cadrul căruia s-au întâlnit cele mai mari dificultăți în alegerea temei de cercetare.

4 DISTRIBUȚIA NORMALĂ

4.1* Un student a avut de susținut examene la trei discipline. La primul examen (Filosofia minții) a obținut nota 9, media grupei fiind 8, iar abaterea standard pentru grupă fiind 1,25. La al doilea examen (Introducere în psihologie) a obținut nota 8,75, media grupei fiind 8,50, iar abaterea standard pentru grupă fiind 0,25. La al treilea examen (Statistică psihologică) a obținut nota 8,50, media grupei fiind 8, iar abaterea standard pentru grupă fiind 1. La care din cele trei discipline studentul a obținut o performanță mai bună?

4.2 Trei persoane cu aproximativ aceeaşi pregătire profesională s-au prezentat pentru ocuparea a trei posturi diferite la o firmă. Scopul psihologului era de a determina care dintre cei trei era cel mai potrivit pentru fiecare post în parte. Primul post era de responsabil cu imaginea pentru firmă (caracteristica cerută: *creativitate*), al doilea de responsabil al departamentului tehnic (caracteristica: *îndemânare*), iar cel de-al treilea de responsabil al departamentului de marketing (caracteristica: *dinamism*). Subiecții au fost supuşi la trei probe distincte, care vizau punerea în evidență a celor trei caracteristici. Următorul tabel prezintă punctajul obținut de fiecare dintre cei trei candidați la cele trei probe:

Candidatul	Proba 1 (creativitate)	Proba 2 (îndemânare)	Proba 3 (dinamism)
A	4	45	28
B	6	36	24
C	7	47	25

Stabiliți ordinea aptitudinilor predominante pentru fiecare dintre cei trei candidați. Pentru care dintre cele trei posturi considerați că ar fi bun fiecare dintre candidați?

4.3* În urma unui test de reacție la stimuli, 100 de subiecți au obținut medie aritmetică de 100 ms, cu o abatere standard de 20 ms. Să se calculeze:

a. Procentul de cazuri cu scoruri mai mari de 140 ms.
b. Procentul de cazuri cu scoruri mai mici de 140 ms.
c. Procentul de cazuri cu scoruri cuprinse între 80 ms şi 90 ms.
d. Procentul de cazuri cu scoruri cuprinse între 120 ms şi 140 ms.

Exprimați rezultatele obținute şi în număr de cazuri.

4.4 La un examen s-au prezentat 80 de candidați, care au obținut o medie a punctajului de 8, abaterea standard fiind 1. Să se calculeze:

a. Probabilitatea ca un candidat luat la întâmplare să obțină o notă mai mare de 8.
b. Probabilitatea ca un candidat luat la întâmplare să obțină o notă mai mică de 5.
c. Probabilitatea ca un subiect luat la întâmplare să obțină o notă situată în intervalul 7–9.
d. Dacă într-un caz similar cu cel prezentat în problemă ştim că probabilitatea de a obține la examen o notă mai mică de 6 a fost de 0,403, iar media colectivității a fost de 8, care este abaterea standard în acest caz?

5 EŞANTIONARE ŞI DISTRIBUȚII DE EŞANTIONARE

5.1 Folosiți teorema limitei centrale pentru a descrie distribuția de eşantionare a mediilor aritmetice pentru două eşantioane, $n_1 = 144$ şi $n_2 = 400$, selectate aleatoriu dintr-o populație cu media aritmetică a unei caracteristici aproximativ normale $\mu = 120$ şi $\sigma = 25$.

5.2 Determinați următoarele probabilități pentru eşantionul $n_1 = 144$ din exercițiul 5.1:

a. $\Pr(\overline{X} > 121{,}4)$
b. $\Pr(\overline{X} < 118{,}2)$
c. $\Pr(\overline{X} < 120{,}8)$
d. $\Pr(\overline{X} > 119{,}4)$

5.3 Determinați următoarele probabilități pentru eşantionul $n_1 = 400$ din exercițiul 5.1:

a. $\Pr(\overline{X} > 121{,}4)$
b. $\Pr(\overline{X} < 118{,}2)$
c. $\Pr(\overline{X} < 120{,}8)$
d. $\Pr(\overline{X} > 119{,}4)$
e. $\Pr(119{,}4 < \overline{X} < 121{,}4)$
f. $\Pr(118{,}2 < \overline{X} < 120{,}8)$

6 PROCEDURI DE ESTIMARE STATISTICĂ

6.1* Într-un studiu privind petrecerea timpului liber, efectuat pe un eşantion de 226 de subiecți, s-a constatat că media aritmetică a numărului de ore/săptămână dedicat vizionării programelor TV este de 6,2, cu o abatere standard de 0,7. La un nivel de încredere de 95%, care este intervalul de încredere estimat pentru media aritmetică a populației de referință?

6.2 Un psiholog doreşte să determine scorul mediu la un test standardizat. Psihologul administrează testul pe un eşantion de 250 de subiecți şi

găseşte că scorul mediu al acestui eşantion este de 134,6, cu o abatere standard de 20. La un nivel de încredere de 99%, care este intervalul de încredere estimat pentru media aritmetică a populaţiei de referinţă?

6.3* Dintr-un eşantion de 150 de persoane, 45% au declarat că mersul pe jos este aproape singura activitate fizică efectuată. La un nivel de încredere de 95%, care este intervalul de încredere estimat pentru valoarea corespunzătoare populaţiei de referinţă?

6.4 Date fiind $\overline{X} = 22{,}6$ şi $s = 2{,}34$, calculaţi şi comparaţi intervalele de încredere estimate pentru $n = 150$ şi $n = 10$ la un nivel de încredere de 95%.

6.5* Care este dimensiunea eşantionului cerută pentru a estima media coeficientului de inteligenţă a unei populaţii cu o precizie de ±5 unităţi la un nivel de încredere de 95%?

7 TESTAREA IPOTEZELOR DESPRE O SINGURĂ POPULAŢIE

7.1 Pentru fiecare dintre următoarele ipoteze, specificaţi în care extremitate a distribuţiei de eşantionare se află zona critică:

a. Media coeficientului de inteligenţă a tuturor studenţilor din facultăţile umaniste este mai mare de 110.
b. Venitul mediu lunar al rezidenţilor din oraşul *X* este mai mare de 5 000 000 de lei.
c. Greutatea medie a bărbaţilor născuţi în 1956 este mai mică de 90 kg.
d. Punctajul obţinut la examenele de admitere în Baroul de Avocaţi din ultimii 5 ani este mai mic de 60.

7.2 Un psiholog presupune că rezolvarea sarcinilor cerute de un anumit test de creativitate se poate face doar în mai mult de o oră. Pentru a verifica această ipoteză, psihologul alcătuieşte un eşantion aleatoriu de 80 de subiecți, le administrează testul respectiv şi constată că media timpului de rezolvare a testului este de 50 de minute. Îşi va modifica psihologul ipoteza la un nivel de încredere de 99%, dacă abaterea standard a populației de referință poate fi estimată a fi de 15 minute?

7.3* Un responsabil din Ministerul Învățământului lansează un studiu pilot pentru a stabili dacă micşorarea grupelor de studenți la 15 persoane are drept efect creşterea calității activităților de seminar. Implicația studiului constă în aceea că dacă activitățile de seminar desfăşurate cu grupe mai mici sunt calitativ superioare celor desfăşurate cu grupe mai mari, atunci grupele de studenți vor fi micşorate în întregul învățământ superior. Ce tip de eroare în testarea ipotezei menționate considerați a fi mai gravă? Comentați răspunsul.

7.4* 250 de subiecți au fost supuşi unui test al timpului de reacție şi au obținut o medie de 0,92 secunde cu o abatere standard de 0,23 secunde. Testați ipoteza conform căreia media timpului de reacție pentru populația de referință este de o secundă, la un nivel de încredere de 95%.

7.5 Un cercetător presupune că studenții de la facultățile umaniste pot da în medie mai mult de 10 răspunsuri corecte la 20 de întrebări privind istoria universală. Scorurile pentru un eşantion de 14 studenți care au răspuns la un astfel de chestionar sunt următoarele:

12	10	9	13	13
8	11	7	14	11
15	17	11	12	

Testați ipoteza cercetătorului la un nivel de încredere de 99%.

7.6 Într-un studiu privind timpul de reacție la persoanele afectate de Parkinson s-a raportat o medie de 1,6 secunde la o anumită sarcină. Un cercetător presupune că timpul de reacție poate fi redus, dacă se foloseşte un set de îndrumări de motivare. Pentru a verifica această ipoteză, un cercetător selectează un eşantion de 12 persoane afectate de Parkinson şi le administrează sarcina respectivă împreună cu setul de îndrumări de motivare. Timpul de reacție pentru cei 12 subiecți este următorul:

Subiectul	Timpul de reacție	Subiectul	Timpul de reacție
A	1,4	G	1,5
B	1,8	H	2,0
C	1,1	I	1,4
D	1,3	J	1,9
E	1,6	K	1,8
F	0,8	L	1,3

Testați ipoteza cercetătorului la un nivel de încredere de 99%.

7.7* Un deputat decide să voteze împotriva unei legi numai dacă mai mult de 60% dintre alegătorii din circumscripția sa electorală nu sunt de acord cu legea respectivă. Într-o cercetare asupra 200 de alegători selectați aleatoriu din circumscripția sa electorală, 140 s-au declarat împotriva legii respective. Ce trebuie să facă deputatul? (α = 0,05).

8 TESTAREA IPOTEZELOR DESPRE DIFERENȚELE DINTRE DOUĂ POPULAȚII

8.1* Unui eşantion aleatoriu de persoane căsătorite i s-a administrat o scală care măsoară la nivel de interval satisfacția față de viața de

familie. Eşantionul a fost împărţit în persoane fără copii şi persoane cu cel puţin un copil şi s-au calculat mediile aritmetice şi abaterile standard pentru ambele grupuri. Rezultatele sunt următoarele:

Grupul 1 (fără copii)	Grupul 2 (cel puţin un copil)
$\overline{X}_1 = 11{,}3$	$\overline{X}_2 = 10{,}8$
$s_1 = 0{,}6$	$s_2 = 0{,}5$
$n_1 = 78$	$n_2 = 93$

Există o diferenţă semnificativă între cele două grupuri în privinţa satisfacţiei faţă de viaţa de familie? ($\alpha = 0{,}05$).

8.2[*] Un număr de 160 de piloţi ai unei şcoli de aviaţie din Bucureşti se relaxau înainte de zbor printr-o metodă specială, riguros controlată ştiinţific, obţinând la probele de zbor o medie a notelor de 9,18, cu o abatere standard de 1,15. Stabiliţi dacă această metodă este superioară celei de relaxare individuală necontrolată, practicată de 190 de elevi ai unei şcoli de aviaţie din Bacău, care au obţinut o medie a notelor la probele de zbor de 9,05 cu abaterea standard de 1,25.

8.3 Două universităţi, una din Bucureşti şi una din Timişoara, au aplicat două metode diferite cu scopul de a îmbunătăţi rezultatele studenţilor la diferite materii de specialitate. În urma aplicării acestor metode, rezultatele înregistrate au fost următoarele:

UB	UT
$\overline{X}_1 = 8{,}56$	$\overline{X}_2 = 8{,}48$
$s_1 = 1{,}75$	$s_2 = 1{,}2$
$n_1 = 420$	$n_2 = 340$

La un nivel de încredere de 95%, se poate spune că rezultatele obținute prin metoda folosită la UB sunt mai bune decât cele obținute prin metoda folosită la UT?

8.4 Un psiholog industrial este interesat de diferența dintre muncitorii cu productivitate înaltă şi cei cu productivitate scăzută în raport cu o serie de factori psihologici. Psihologul selectează eşantioane aleatorii din cele două categorii de muncitori şi le administrează o baterie standardizată de teste, rezultatele fiind următoarele:

Productivitate înaltă: 8, 6, 4, 12, 16, 17, 12, 10, 11, 13
Productivitate scăzută: 23, 11, 17, 16, 6, 14, 15, 19.

Este semnificativă diferența dintre cele două categorii de muncitori? ($\alpha = 0{,}01$).

8.5* Un cercetător doreşte să determine dacă copiii învață mai bine concepte asociate doar cu exemple pozitive sau asociate atât cu exemple pozitive, cât şi cu exemple negative. 20 de copii au fost repartizați aleatoriu în două grupuri corespunzătoare celor două condiții experimentale. Scorurile la un test privind formarea conceptelor sunt următoarele:

Grupul 1 (exemple pozitive)	Grupul 2 (exemple pozitive + negative)
8	14
10	8
7	7
12	10
6	12
9	6
10	15
11	11
6	9
13	8

Există o diferență semnificativă între cele două metode? (α = 0,01).

8.6* Într-o cercetare privind efectele anti-anxiolitice a două medicamente, X şi Y, s-a constatat că 75 dintre 100 de persoane tratate cu medicamentul X au prezentat ameliorări ale episoadelor anxioase şi din 160 de persoane tratate cu medicamentul Y, 105 au prezentat ameliorări. La un nivel de încredere de 95%, testați dacă diferența dintre cele două tratamente este semnificativă.

9 ANALIZA DE VARIANȚĂ

9.1 În termenii modelului în patru paşi, formulați testul ANOVA aplicat în secțiunea 9.3 (α = 0,05).

9.2* Într-un experiment privind strategiile de rezolvare de probleme, 26 de subiecți sunt repartizați aleatoriu în cinci grupuri, fiecare grup fiind instruit să folosească o anumită strategie. După instruire, subiecților li se dă o listă de probleme de rezolvat cu ajutorul strategiei învățate. Timpul în care subiecții au rezolvat problemele, măsurat în minute, este prezentat în următorul tabel:

Grupul				
1	2	3	4	5
32	30	85	38	53
41	39	76	29	43
53	52	70	21	47
67	64	64		52
48	51			67
39	37			
44	44			

Formulați şi testați ipoteza de nul corespunzătoare experimentului la un nivel α = 0,05.

9.3* Să presupunem că la experimentul menţionat în exerciţiul 9.2 participă 40 de subiecţi, repartizaţi câte 8 în fiecare grup. Tabelul ANOVA incomplet pentru acest experiment este următorul:

Sursa de variaţie	Sume de pătrate	Grade de libertate	Medii ale sumelor	*F* (obţinut)
A	95,80			
EROARE			3,66	
TOTAL				

Completaţi acest tabel şi interpretaţi rezultatul, folosind un nivel $\alpha = 0,01$.

9.4 Un psiholog montează un experiment privind stocarea în memoria de lucru, după cum urmează. 30 de subiecţi sunt clasificaţi aleatoriu în trei grupuri de câte 10 subiecţi fiecare. Subiecţilor din fiecare grup li se prezintă aceeaşi listă de „cuvinte“ fără sens pentru a fi reţinute, după care li se distrage atenţia printr-o metodă diferită faţă de metoda folosită în cazul celorlalte două grupuri. După un anumit interval de timp, tuturor subiecţilor li se cere să-şi amintească „cuvintele“ reţinute, răspunsurile corecte fiind înregistrate sub formă de procente. Datele obţinute sunt următoarele:

Grupul		
1	2	3
49	90	97
64	55	87
81	53	82
85	79	88
53	80	81
44	80	60
81	52	56
74	59	67
43	83	58
78	85	98

Stabiliți dacă cele trei metode diferite de distragere a atenției influențează semnificativ memoria de lucru la un nivel $\alpha = 0{,}01$. Dar la un nivel $\alpha = 0{,}05$?

9.5 Patru eşantioane aleatoare de subiecţi voluntari au fost supuse, respectiv, la 0, 24, 48 şi 72 de ore de privare de somn, pentru a se verifica efectul lipsei de somn asupra timpului de reacţie. Timpul de reacţie a fost măsurat pe o scală de la 1 la 10, 10 fiind cel mai rapid timp de reacţie. Rezultatele obţinute sunt următoarele:

Eşantionul			
0	24	48	72
9	8	7	4
7	5	6	5
5	7	5	3
8	4	3	6
10	6	4	2
6	6	7	8

Stabiliţi dacă există diferenţe semnificative în privinţa timpului de reacţie în funcţie de perioada de privare de somn la un nivel $\alpha = 0{,}05$.

9.6 Un cercetător studiază performanţele a şase subiecţi în cinci încercări privind o anumită sarcină de învăţare. Datele obţinute sunt următoarele:

Subiecţi	Încercarea				
	1	2	3	4	5
A	7	6	9	11	12
B	6	5	6	9	8
C	7	9	11	11	13
D	5	5	5	6	6
E	7	8	9	9	11
F	6	6	7	11	13

Formulaţi şi testaţi ipoteza de nul corespunzătoare experimentului la un nivel $\alpha = 0{,}01$.

9.7 Trei grupe de studenţi s-au pregătit pentru susținerea unui examen, învățând în trei moduri diferite. Astfel, prima grupă a învățat în linişte deplină, a doua grupă a învățat cu muzica dată în surdină, iar cea de-a treia a învățat cu un nivel de sonorizare ridicat. La examen s-au înregistrat următoarele rezultate:

Grupa 1: 9, 8, 8,7,8
Grupa 2: 9,8,6
Grupa 3: 9,7,7,6

La un nivel de încredere de 95%, stabiliți dacă rezultatele celor trei grupe diferă semnificativ.

9.8[*] Un eşantion de 10 persoane a participat la un experiment privind o sarcină de învățare (variabila independentă) sub trei condiții experimentale. Datele obținute sunt următoarele:

Subiectul	Condiția 1	Condiția 2	Condiția 3
A	6	12	18
B	9	14	16
C	4	8	15
D	3	10	12
E	1	6	10
F	7	15	20
G	6	8	15
H	9	11	18
I	8	12	13
J	6	10	16

La un nivel de încredere de 95%, verificaţi dacă rezultatele obținute sub cele trei condiții experimentale diferă semnificativ.

10 TESTE NONPARAMETRICE

10.1* Un cercetător este interesat de posibilele influențe ale statusului marital asupra pregătirii studenților. Un eşantion aleatoriu de 453 de studenți a fost clasificat, pe de o parte în categoriile *căsătorit/necăsătorit*, pe de altă parte în categoriile *bun/mediu/slab*. Datele sunt prezentate în următorul tabel:

Nivel de pregătire	Status marital		TOTAL
	Căsătorit	*Necăsătorit*	
Bun	15	35	50
Mediu	30	10	40
Slab	5	5	10
TOTAL	50	50	100

La un nivel de încredere de 95%, stabiliți dacă nivelul de pregătire al studenților depinde de statusul lor marital.

10.2 Fericirea în viață depinde de statusul marital? Pentru a se răspunde la această întrebare, au fost colectate următoarele date:

Nivel de fericire	Statut marital				TOTAL
	Bărbat căsătorit	*Femeie căsătorită*	*Bărbat necăsătorit*	*Femeie necăsătorită*	
Foarte fericit	18	9	10	3	40
Fericit	15	12	21	15	63
Nefericit	8	15	16	12	51
Foarte nefericit	4	7	3	6	20
TOTAL	45	43	50	36	174

Cum ați răspunde la această întrebare la un nivel de încredere de 95%?

10.3[*] Următoarele date au fost obţinute în urma unui studiu proiectat să examineze relaţia dintre statusul marital şi modul de petrecere a timpului liber (MPTL):

MPTL	Statut marital				TOTAL
	Necăsătorit	*Căsătorit*	*Divorţat*	*Văduv*	
Individual	18	8	10	6	42
În grupuri mici	4	12	7	16	39
În grupuri mari	3	5	8	4	20
TOTAL	25	25	25	26	101

La un nivel de încredere de 95%, stabiliţi dacă cele două variabile sunt independente. Dacă nu, calculaţi reziduurile standard.

10.4[*] Un cercetător pretinde că 65% din populaţia adultă a României respinge interzicerea prin lege a avorturilor, precum şi că procentul de 65% este acelaşi, indiferent de sex sau status marital. Cercetătorul alcătuieşte patru eşantioane aleatorii după cum urmează:

1. 100 de bărbaţi căsătoriţi
2. 150 de femei căsătorite
3. 80 de bărbaţi necăsătoriţi
4. 50 de femei necăsătorite

Împotriva interzicerii prin lege a avorturilor s-au pronunţat 54 de subiecţi din primul eşantion, 102 din cel de-al doilea eşantion, 59 din cel de-al treilea eşantion şi 32 din cel de-al patrulea eşantion. La un nivel de încredere de 95%, stabiliţi dacă proporţiile observate confirmă ipoteza cercetătorului.

10.5* În perioada unei campanii electorale pentru alegeri generale, subiecţii dintr-un eşantion aleatoriu de 50 de persoane au fost solicitaţi să răspundă prin *Da* sau *Nu* la întrebarea „Intenţionaţi să votaţi pentru candidatul X?”. Întrebarea a fost pusă înainte şi după ce persoanele din eşantion au vizionat o serie de emisiuni TV în care X şi-a prezentat programul. Rezultatele obţinute sunt următoarele:

		Înainte de vizionare		
		Da	Nu	
După vizionare	Nu	6 **A**	17 ***B***	
	Da	11 **C**	16 **D**	
				50

La un nivel de încredere de 95%, stabiliţi dacă este semnificativă diferenţa dintre persoanele care şi-au schimbat opinia de la *Da* la *Nu* şi cele care şi-au schimbat opinia de la *Nu* la *Da*.

10.6 Subiecţii din două eşantioane aleatorii de câte 10 copii (clasele I–IV) au fost evaluaţi cu ajutorul unei scale de agresivitate de la 25 (*foarte agresiv*) la 1 (*puţin agresiv*). Eşantionul 1 este alcătuit din copii singuri la părinţi, iar eşantionul 2 din copii care au cel puţin un frate sau o soră. Scorurile obţinute sunt următoarele:

Eşantionul 1: 15, 12, 8, 7, 6, 4, 3, 2, 2, 1
Eşantionul 2: 23, 16, 10, 8, 7, 7, 5, 4, 3, 2

La un nivel de încredere de 95%, folosiţi testul Mann-Whitney *U* pentru a stabili dacă există o diferenţă semnificativă în privinţa

agresivității între copii singuri la părinți şi copii care au cel puțin un frate sau o soră (Mann–Whitney *U*).

10.7* Un psiholog doreşte să ştie dacă există o diferență semnificativă între copii de sex masculin şi cei de sex feminin în privința nivelului de reacție la stimuli de comunicare non-verbală. Psihologul presupune că fetele vor sesiza mai mulți stimuli şi astfel vor obține scoruri mai mici, luând în considerare atât acuratețea, cât şi profunzimea interpretării stimulilor. Scorurile obținute de două eşantioane, băieți (1) şi fete (2), sunt următoarele:

Eşantionul 1: 26, 25,23, 22, 21, 19, 16, 15, 13, 10
Eşantionul 2: 24, 20, 18, 17, 14, 12, 11, 9, 8, 7

Verificați ipoteza psihologului, folosind testul medianei.

10.8* Un cercetător doreşte să afle dacă există o diferență pe sexe privind sancționarea actelor considerate a fi necinstite. Pentru aceasta, alcătuieşte un eşantion aleatoriu de 12 bărbați (1) şi un eşantion aleatoriu de 12 femei (2) şi prezintă subiecților din cele două eşantioane câteva scurte descrieri ale unor acte care pot fi considerate necinstite (de pildă, a nu spune vânzătorului sau casierului că suma de bani primită ca rest este mai mare decât cea cuvenită). Fiecare act este apreciat cu ajutorul unei scale, de la 50 (*foarte necinstit*) la 0 (*deloc necinstit*):
Eşantionul 1: 47, 44, 40, 35, 32, 31, 30, 29, 25, 24, 20, 12
Eşantionul 2: 48, 45, 43, 42, 39, 36, 33, 28, 23, 21, 15, 14
La un nivel de încredere de 95%, este statistic semnificativă diferența dintre bărbați şi femei sub aspectul sancționării actelor considerate a fi necinstite?

10.9 Un eşantion aleatoriu de 12 paciente suferind de anorexie nervoasă au urmat un tratament psihanalitic. Înainte şi după tratament, celor 12 paciente le-a fost administrat un test care evidențiază nivelul de

încredere în sine. Scorurile pre şi post-tratament sunt următoarele (un scor mic reprezintă un nivel scăzut de încredere în sine):

Cazul	Pre-tratament	Post-tratament
1	15	20
2	8	9
3	10	10
4	11	16
5	13	17
6	14	14
7	10	13
8	12	15
9	9	18
10	14	12
11	8	10
12	7	9

La un nivel de încredere de 99%, există o influență semnificativă a tratamentului psihanalitic asupra nivelului de încredere în sine al pacientelor?

10.10* Într-o cercetare privind nivelul de acomodare emoțională a elevilor din învățământul primar în funcție de antecedentele preşcolare, au fost alcătuite patru eşantioane aleatorii, după cum urmează: 1. copii de a căror educație s-au ocupat părinții, 2. copii de a căror educație s-au ocupat bunicii, 3. copii care au fost la grădiniță, 4. copii de a căror educație s-a ocupat o baby-sitter. Presupunând că variabila *nivel de acomodare emoțională* a fost măsurată la nivel ordinal, datele obținute sunt următoarele:

Eşantionul 1	Eşantionul 2	Eşantionul 3	Eşantionul 4
42	31	47	37
35	44	49	40
39	38	34	32
50		46	33
45		41	
48		43	
36			

La un nivel de încredere de 95%, stabiliți dacă există diferențe semnificative în privința nivelului de acomodare emoțională în funcție de antecedentele preşcolare.

11 MĂRIMI ALE CORELAȚIEI

11.1 Un psiholog investighează relația dintre statusul marital şi nivelul perceput de satisfacție în viață pentru un eşantion de 115 subiecți:

Nivel de satisfacție	Status marital		*TOTAL*
	Căsătorit	*Necăsătorit*	
Înalt	44	21	65
Scăzut	16	34	50
TOTAL	60	55	115

Calculați coeficientul φ pentru aceste date.

11.2 Calculați coeficienții de corelație C şi V pentru datele din exercițiul 10.1.

11.3 Un eşantion aleatoriu de studenți au fost clasificați ca „tradiționali“ (18–23 de ani şi necăsătoriți) sau „netradiționali“ (cel puțin 24 de ani sau căsătoriți) şi, pe de altă parte, ca „vocaționali“ (motivația principală pentru studii superioare este practicarea profesiei respective) sau „academici“ (motivația principală pentru studii superioare este cariera universitară sau de cercetare ştiințifică). Calculați coeficientul λ pentru datele obținute:

Motivația	Tipul		TOTAL
	Tradițional	*Netradițional*	
Vocațională	25	60	85
Academică	75	15	90
TOTAL	100	75	175

11.4* Tabelul următor prezintă scorurile obținute la un test de aptitudini dat la angajare şi aprecierile privind eficiența profesională după un an de activitate pentru un eşantion aleatoriu de 75 de salariați ai unei firme:

Eficiența profesională	*Scorul obținut la test*			*TOTAL*
	Mic	*Mediu*	*Mare*	
Înaltă	5	9	9	23
Moderată	9	10	9	28
Scăzută	11	6	7	24
TOTAL	25	25	25	75

(a) Sunt corelate cele două variabile? Dacă da, care este tăria şi sensul corelației?

(b) Coeficientul de corelație calculat pentru acest eşantion este statistic semnificativ la un nivel de încredere de 95%?

11.5 Tabelul următor prezintă scorurile obţinute în privinţa variabilelor *stare materială* şi *consum de băuturi alcoolice* pentru un eşantion de 300 de subiecţi:

Consum de băuturi alcoolice	Starea materială				*TOTAL*
	Proastă	*Destul de proastă*	Destul de bună	Bună	
Frecvent	10	10	15	35	70
Ocazional	20	20	20	25	85
Rar	25	25	12	20	82
Deloc	30	15	8	10	63
TOTAL	85	70	55	90	300

Calculaţi coeficienţii γ, d şi τ_b pentru acest tabel şi interpretaţi rezultatele obţinute.

11.6* Tabelul următor prezintă indicele de calitate a vieţii şi cel de coeziune socială pentru 10 oraşe (scorurile mari reprezintă indici înalţi în privinţa ambelor variabile):

Oraşul	Calitatea vieţii	Coeziunea socială
A	17	8,8
B	40	3,9
C	47	4,0
D	90	3,1
E	35	7,5
F	52	3,5
G	23	6,3
H	67	1,7
I	65	9,2
J	63	3,0

(a) Sunt corelate cele două variabile? Dacă da, care este tăria şi sensul corelaţiei?

(b) Coeficientul de corelaţie calculat pentru acest eşantion este statistic semnificativ la un nivel de încredere de 95%?

11.7 Cinci oraşe au fost ordonate în privinţa indicelui de calitate a vieţii şi a fost calculat procentul populaţiei care s-a mutat în fiecare oraş în anul precedent. Datele sunt următoarele:

Oraşul	Calitatea vieţii	Noi rezidenţi (%)
A	30	17
B	25	14
C	20	15
D	10	3
E	2	5

Există o corelaţie între cele două variabile? Dacă da, care este tăria şi sensul corelaţiei?

11.8 Următorul tabel prezintă coeficienţii de inteligenţă pentru un eşantion de 15 elevi şi aprecierea subiectivă a unui profesor despre inteligenţa elevilor din eşantion:

Elevul	Aprecierea subiectivă	Coeficientul de inteligenţă
A	15	88
B	13	92
C	14	97
D	7	102
E	11	108
F	12	115
G	6	117
H	10	120
I	8	123
J	9	126
K	3	130
L	5	133
M	2	137
N	1	140
O	4	145

Există o corelaţie între aprecierea subiectivă a profesorului şi coeficienţii de inteligenţă?

11.9 Testați pentru semnificație valoarea coeficientului $\gamma = 0{,}57$ obținută pentru datele din tabelul 11.7.

11.10 Testați pentru semnificație valoarea coeficientului $\rho_s = 0{,}86$ obținută pentru datele din tabelul 11.8.

11.11 Următoarele valori au fost observate pentru cinci subiecți în privința variabilelor *X* şi *Y*:

Subiectul	Variabila *X*	Variabila *Y*
A	2	6
B	6	14
C	5	12
D	4	10
E	1	4

Construiți diagrama de împrăştiere pentru aceste date şi apreciați sensul corelației dintre cele două variabile.

11.12 Tabelul următor prezintă scorurile la două teste care măsoară capacitatea de comunicare verbală:

Subiectul	Testul 1	Testul 2
A	55	94
B	52	91
C	51	88
D	48	84
E	44	86
F	40	81
G	37	85
H	34	76
I	32	79
J	30	74

a. Calculați coeficientul *r* pentru datele din acest tabel.
b. Calculați coeficientul *r* doar pentru primii cinci subiecți.
c. Comparați rezultatele obținute la punctele a şi b şi comentați această comparație.

11.13* Un cercetător crede că există o corelație între numărul de țigări fumate pe zi şi inteligență. Următorul tabel prezintă date strânse pentru un eşantion aleatoriu de 15 fumători. Calculați r şi r^2 pentru aceste date şi comentați rezultatele.

Subiectul	Nr. țigări/zi	Inteligența (codificat)
A	7	10
B	49	6
C	41	15
D	38	5
E	37	12
F	19	4
G	35	19
H	40	11
I	1	3
J	10	3
K	18	22
L	21	17
M	15	12
N	7	9
O	38	13

11.14* Pentru un eşantion de 12 familii au fost colectate următoarele date privind numărul de copii, numărul de ore pe care soțul le afectează treburilor gospodăreşti şi nivelul de educație al acestuia (măsurat în ani de şcoală). Datele obținute sunt următoarele:

Familia	Nr. de copii	Nivel de educație	Nr. ore/săptămână
A	1	12	1
B	1	14	2
C	1	16	3
D	1	16	5
E	2	18	3
F	2	16	1
G	3	12	5
H	3	12	0
I	4	10	6
J	4	12	3
K	5	10	7
L	5	16	4

a. Construiţi diagramele de împrăştiere pentru relaţia dintre numărul de copii şi numărul de ore/săptămână afectat treburilor gospodăreşti şi pentru relaţia dintre numărul de copii şi nivelul de educaţie.
b. Determinaţi ecuaţia de regresie bivariată pentru relaţia dintre numărul de copii şi numărul de ore/săptămână afectat treburilor gospodăreşti.
c. Câte ore/săptămână afectează soţul treburilor gospodăreşti într-o familie cu 6 copii?
d. Calculaţi r şi r^2 pentru corelaţia bivariată menţionată la punctul b şi interpretaţi rezultatele.
e. Testaţi pentru semnificaţie valoarea coeficientului de corelaţie parţială de ordinul zero obţinut la punctul d la un nivel de încredere de 95%.
f. Corelaţia dintre numărul de copii şi numărul de ore/săptămână afectat treburilor gospodăreşti este influenţată de nivelul de educaţie al soţului?
g. Determinaţi ecuaţia de regresie multiplă nestandardizată şi stabiliţi câte ore/săptămână afectează treburilor gospodăreşti un soţ cu 11 ani de şcoală într-o familie cu 4 copii.
h. Determinaţi ecuaţia de regresie multiplă standardizată şi stabiliţi care dintre variabilele independente are o influenţă mai puternică asupra variabilei dependente.
i. Calculaţi R şi R^2 şi interpretaţi rezultatele.

11.15 Pentru 18 oraşe din România au fost colectate următoarele date privind rata delincvenței juvenile (RDJ), procentul de familii intacte (cu ambii părinți) şi nivelul mediu de educație al părinților (măsurat în ani de şcoală). Datele obținute sunt următoarele:

Oraşul	Familii intacte (%)	Nivel de educație	RDJ
A	90	12,1	1,2
B	86	12,2	0,7
C	80	9,2	3,5
D	75	11,1	6,7
E	65	8,5	5,8
F	76	11,8	4,2
G	67	10,5	3,8
H	75	12,3	1
I	74	12,7	1
J	88	12,4	0,5
K	85	13,1	0,3
L	73	10,1	4,7
M	72	9,8	4,5
N	61	12,0	5,3
O	64	11,9	6,8
P	60	9,0	7,1
R	63	11,1	9,1
S	57	9,2	9,3

a. Construiți diagrame de împrăştiere pentru relația dintre nivelul de educație şi RDJ şi pentru relația dintre procentul de familii intacte şi RDJ.
b. Determinați ecuația de regresie bivariată pentru relația dintre fiecare variabilă independentă şi RDJ.
c. Calculați r şi r^2 pentru fiecare corelație bivariată şi interpretați rezultatele.
d. Testați pentru semnificație valoarea coeficienților de corelație parțială de ordinul zero obținuți la punctul d la un nivel de încredere de 95%.

e. Corelația dintre procentul de familii intacte şi RDJ este influențată de nivelul de educație?
f. Determinați ecuația de regresie multiplă nestandardizată şi stabiliți RDJ pentru un oraş cu 70% familii intacte şi un nivel mediu de educație de 14 ani.
g. Determinați ecuația de regresie multiplă standardizată şi stabiliți care dintre variabilele independente are o influență mai puternică asupra variabilei dependente.
h. Calculați R şi R^2 şi interpretați rezultatele.

SOLUȚII ŞI INDICAȚII DE REZOLVARE

CAPITOLUL 3

3.1 a. $\overline{X} = 12{,}48$; $\widetilde{X} = 13$; $Mo = 14$.

b. $A = 13$; $Q = Q_3 - Q_1 = 14{,}5 - 9{,}5 = 5$; $s = 3{,}16$.

c. $D2 = 9$; $D9 = 16{,}5$; $P14 = 8$; $P21 = 9$

3.2 Tabelul de calcule pentru mărimile cerute este următorul:

Număr de erori	f	m	fm	fc	m^2	fm^2
3–6	3	4,5	13,5	3	20,25	60,75
7–10	5	8,5	42,5	8	72,5	362,5
11–14	9	12,5	112,5	17	156,25	1406,25
15–18	16	16,5	264	33	272,25	4356
19–22	10	20,5	205	43	420,25	4202,5
23–26	4	24,5	98	47	600,25	2401
27–30	3	28,5	85,5	50	812,25	2436,75
31–34	1	32,5	32,5	51	1056,25	1056,25
TOTAL	51		853,5			16282

$$\overline{X} \cong \frac{\sum f_i m_i}{n} = \frac{853{,}5}{51} = 16{,}73$$

$$\widetilde{X} \cong LCRI_{\ddot{X}} + \left(\frac{n/2 - fc_i}{f_i}\right) i = 14{,}5 + \left(\frac{(51/2) - 17}{16}\right) 4 = 14{,}75$$

$$s \cong \sqrt{\frac{\sum f_i m_i^{\ 2} - \frac{\left(\sum f_i m_i\right)^2}{n}}{n-1}} = \sqrt{\frac{16282 - \frac{(853{,}5)^2}{51}}{51-1}} = 6{,}32$$

$\overline{X} \cong 16{,}73$; $\widetilde{X} \cong 14{,}75$; $s \cong 6{,}32$.

3.5 IQV_1 = 0,971; IQV_2 = 0,984; IQV_3 = 0,980. Întrucât $IQV_2 > IQV_3 > IQV_1$, cea mai mare omogenitate în luarea deciziei a fost întâlnită în privința primei probleme, unde a fost înregistrată cea mai mică valoare pentru indicele variației calitative; mai dificilă decât prima a fost soluționarea celei de-a treia probleme, iar cea mai complexă, conform opțiunilor înregistrate a fost cea de-a doua problemă (cu gradul cel mai mare de eterogenitate în luarea deciziei).

CAPITOLUL 4

4.1 Standardizând scorurile obținute la cele trei discipline obținem: $Z_1 = 0{,}8$; $Z_2 = 1{,}0$; $Z_3 = 0{,}50$. Întrucât $Z_2 > Z_1 > Z_3$, putem concluziona că studentul a obținut cea mai bună performanță la a doua disciplină de studiu (Introducere în psihologie), iar cea mai slabă la a treia (Statistică psihologică), unde a înregistrat cel mai mic scor standard.

4.3 a. 2,3%: aproximativ 2 subiecți au obținut un timp de reacție mai mare de 140 ms.
b. 97,7%: aproximativ 98 de subiecți au obținut un timp de reacție mai mic de 140 ms.
c. 15,03%: aproximativ 15 subiecți au obținut un timp de reacție cuprins între 80 ms şi 90 ms.
d. 13,57%: aproximativ 14 subiecți au obținut un timp de reacție cuprins între 120 ms şi 140 ms.

CAPITOLUL 5

5.2 a. $\Pr(\overline{X} > 121{,}4) = 0{,}2514$ c. $\Pr(\overline{X} < 120{,}8) = 0{,}6480$

b. $\Pr(\overline{X} < 118{,}2) = 0{,}1922$ d. $\Pr(\overline{X} > 119{,}4) = 0{,}6141$

CAPITOLUL 6

6.1 $IE = \overline{X} \pm Z_{\alpha/2}(s/\sqrt{n-1}) = 6{,}2 \pm 1{,}96\left(\dfrac{0{,}7}{\sqrt{226-1}}\right) = 6{,}2 \pm 0{,}047$

6.3 $IE = p \pm Z_{\alpha/2}\sqrt{\dfrac{0{,}25}{n}} = 0{,}45 \pm 1{,}96\sqrt{\dfrac{0{,}25}{150}} = 0{,}45 \pm 0{,}04$

6.5 $n = \dfrac{Z_{\sigma/2}^{2}\,0{,}25}{L^2} = \dfrac{(1{,}96)^2\,0{,}25}{(0{,}05)^2} = 384{,}16 \cong 384$

CAPITOLUL 7

7.3 Gravitatea unui tip de eroare sau a celuilalt depinde de costurile relative ale erorilor. Probabil că o eroare de tipul II este mai gravă aici, deoarece ar conduce la pierderea posibilității de creştere a calității activităților de seminar. Pe de altă parte, dacă costul micşorării grupelor de studenți este foarte mare, atunci consecințele unei erori de tipul II pot fi, de asemenea, serioase, deoarece s-ar cheltui foarte mulți bani care, altfel, ar putea fi folosiți pentru îmbunătățirea mediului de predare/învățare.

7.4 H_0: μ = 1s; H_a: $\mu \neq$ 1s. Z (obținut) = –5,51. $Z_{\alpha/2}$ (critic) = ±1,96. Ipoteza conform căreia media timpului de reacție pentru populația de referință este de o secundă poate fi respinsă la un nivel de încredere de 95%.

7.7 H_0: P = 0,60; H_a: P > 0,60. Z_{α} (critic) = +1,645; Z (obținut) = +3,08. H_0 poate fi respinsă la un nivel de încredere de 95%, deci deputatul poate vota împotriva legii respective.

CAPITOLUL 8

8.1 H_0: $\mu_1 = \mu_2$; H_a: $\mu_1 \neq \mu_2$. Z (obținut) = +5,55. $Z_{\alpha/2}$ (critic) = ±1,96. Se poate respinge H_0. Diferența dintre cele două grupuri este statistic semnificativă la un nivel de încredere de 95%.

8.2 H_0: $\mu_1 = \mu_2$; H_a: $\mu_1 \neq \mu_2$. Z (obținut) = +1,031. $Z_{\alpha/2}$ (critic) = ±1,96. Nu se poate respinge H_0. Mediile înregistrate de piloții celor două școli de aviație nu diferă în mod semnificativ la un nivel de încredere de 95%.

8.5 H_0: $\mu_1 = \mu_2$; H_a: $\mu_1 \neq \mu_2$. t (obținut) = –0,657. $t_{\alpha/2}$ (critic) = ±2,878. Nu se poate respinge H_0. Diferența dintre cele două metode nu este statistic semnificativă la un nivel de încredere de 99%.

8.6 H_0: $P_1 = P_2$; H_a: $P_1 \neq P_2$. Z (obținut) = +1,59. $Z_{\alpha/2}$ (critic) = ±1,96. Nu se poate respinge H_0. Diferența dintre proporțiile pacienților care au prezentat ameliorări nu este statistic semnificativă la un nivel de încredere de 95%.

CAPITOLUL 9

9.2 H_0: $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4 = \mu_5$; H_a: cel puțin o medie aritmetică diferă de celelalte.

Sursa de variație	Sume de pătrate	Grade de libertate	Medii ale sumelor	*F* (obținut)
A	3810,98	4	952,75	
EROARE	2255,48	21	107,40	8,87
TOTAL	6066,46	25		

Întrucât F (critic) = 2,84, se poate respinge H_0. La nivelul populației, mediile aritmetice ale scorurilor corespunzătoare celor cinci strategii de învățare de probleme diferă semnificativ la un nivel de încredere de 95%.

9.3 H_0: $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4 = \mu_5$; H_a: cel puțin o medie aritmetică diferă de celelalte.

Sursa de variație	Sume de pătrate	Grade de libertate	Medii ale sumelor	*F* (obținut)
A	95,8	4	23,95	
EROARE	128,1	35	3,66	6,54
TOTAL	223,9	39		

Întrucât F (critic) = 2,84, se poate respinge H_0 la un nivel de încredere de 99%.

9.8 H_0: $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3$; H_a: cel puțin o medie aritmetică diferă de celelalte.

Sursa de variație	Sume de pătrate	Grade de libertate	Medii ale sumelor	*F* (obținut)
A	167,33	9	18,59	76,13
SUBIECȚI	423,27	2	-	
EROARE	50,07	18	2,78	
TOTAL	640,67	29		

Întrucât *F* (critic) = 3,55, se poate respinge H_0. Rezultatele obținute sub cele trei condiții experimentale diferă semnificativ la un nivel de încredere de 95%.

CAPITOLUL 10

10.1 H_0: variabilele *status marital* şi *nivel de pregătire* sunt independente; H_a: Variabilele *status marital* şi *nivel de pregătire* sunt dependente. χ^2 (obținut) = 2,79. χ^2 (critic) = 5,991. Nu se poate respinge H_0. La un nivel de încredere de 95%, frecvențele observate nu diferă semnificativ de frecvențele la care ne-am aştepta dacă variabilele ar fi independente şi ar interveni doar întâmplarea.

10.3 H_0: variabilele *status marital* şi *MPTL* sunt independente; H_a: variabilele *status marital* şi *MPTL* sunt dependente. χ^2 (obținut) = 18,389. χ^2 (critic) = 12,592. Se poate respinge H_0 la un nivel de încredere de 95%. Reziduurile standard:

	Necăsătorit	Căsătorit	Divorțat	Văduv
Individual	2,315*	–0,772	0,154	–1,389
În grupuri mici	–1,786	0,812	–0,812	1,786
În grupuri mari	–0,893	0,000	1,339	–0,446

10.4 H_0: nu există nici o diferență între proporțiile de cazuri pentru eşantioane şi proporțiile pentru populație; H_a: proporțiile de cazuri

pentru eşantioane diferă de cele pentru populaţie. χ^2 (obţinut) = 3,00. χ^2 (critic) = 7,815. Nu se poate respinge H_0. Diferenţele dintre proporţiile pentru eşantioane şi proporţia presupusă de 0,65 pot fi atribuite întâmplării. Ipoteza cercetătorului nu se confirmă la un nivel de încredere de 95%.

10.5 H_0: există un număr egal de schimbări în ambele direcţii (diferenţa este nesemnificativă); H_a: numărul de schimbări într-o direcţie este semnificativ diferit faţă de numărul de schimbări în cealaltă direcţie.

$$\chi^2 = \frac{(A-D)^2}{A+D} = \frac{(6-16)^2}{6+16} = \frac{100}{22} = 4{,}545$$

χ^2 (critic) = 3,841. Se poate respinge H_0. Din tabel rezultă că mai multe persoane din eşantion îşi schimbă opinia de la *Nu* la *Da*, decât de la *Da* la *Nu*, iar testul arată că această diferenţă este semnificativă la un nivel de încredere de 95%.

10.7 H_0: nu există nici o diferenţă între copii de sex masculin şi cei de sex feminin în privinţa nivelului de reacţie la stimuli de comunicare non-verbală; H_a: $\text{Scoruri}_F < \text{Scoruri}_M$. χ^2 (obţinut) = 0,80. χ^2 (critic) = 2,706. Nu se poate respinge H_0 la un nivel de încredere de 95%.

10.8 Obiectivul urmărit este compararea a două populaţii sub aspectul unei variabile, datele fiind nonparametrice. Eşantioanele aleatorii sunt independente, nivelul de măsură este ordinal, iar cele două eşantioane sunt mici. Prin urmare, se poate folosi testul Mann–Whitney *U* pentru eşantioane mici sau testul iteraţiilor, ţinând cont şi de faptul că nu întâlnim scoruri identice în eşantioane diferite.

10.10 Obiectivul urmărit este compararea a patru populaţii sub aspectul unei variabile măsurate la nivel ordinal, eşantioanele aleatorii fiind indepentente. Prin urmare, se poate folosi testul Kruskal–Wallis *H*.

CAPITOLUL 11

11.4 (a) N_a = 767; N_d = 491; γ = 0,22. Între cele două variabile există o corelație pozitivă foarte slabă. Testul de aptitudini nu este satisfăcător.

(b) H_0: γ = 0,00; H_a: $\gamma \neq$ 0,00. Z (obținut) = 0,92. Z (critic) = ±1,96. Nu se poate respinge H_0 la un nivel de încredere de 95%. Valoarea coeficientului γ obținută pentru eşantion nu este statistic semnificativă.

11.6 (a) ρ_s = –0,59. Între cele două variabile există o corelație negativă moderată. Oraşele cu un indice mare al calității vieții tind să aibă un indice mic de coeziune socială.

(b) H_0: ρ_s = 0,00; H_a: $\rho_s \neq$ 0.00. t (obținut) = –2,056. t (critic) = ±2,306. Nu se poate respinge H_0 la un nivel de încredere de 95%. Valoarea coeficientului ρ_s obținută pentru eşantion nu este statistic semnificativă.

11.13 r = 0,22. r^2 = 0,048. Corelația dintre numărul de țigări fumate pe zi şi inteligență este pozitivă, dar foarte slabă. Doar un foarte mic procent de variație este împărtăşit de ambele variabile (aproximativ 5%). Alți factori sunt mult mai importanți în determinarea scorurilor subiecților în privința acestor variabile.

11.14 b. $Y = 1{,}49 + (0{,}69 \cdot X)$

c. Într-o familie cu 6 copii, soțul afectează 5,53 ore/săptămână treburilor gospodăreşti.

d. r = 0,50. r^2 = 0,25. Între cele două variabile există o corelație pozitivă moderată. Numărul de copii explică doar 25% din variația totală a numărului de ore afectat treburilor gospodăreşti de către soți.

e. H_0: ρ = 0,00; H_a: $\rho \neq$ 0.00. t (obținut) = 1.83. t (critic) = ±2,228. Nu se poate respinge H_0 la un nivel de încredere de 95%. Valoarea coeficientului r obținută pentru eșantion nu este statistic semnificativă.

f. r_{yzx} = 0,43. r_{yz} = 0,50. Întrucât $r_{yzx} \cong r_{yz}$, nivelul de educație al soțului nu afectează corelația bivariată constatată inițial.

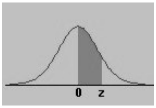
g. $Y = 2{,}5 + (0{,}65 \cdot X_1) + (-0{,}07 \cdot X_2)$. Un soț cu 11 ani de școală într-o familie cu 4 copii afectează 4,3 ore/săptămână treburilor gospodărești.

h. $Z_y = (0{,}46 \cdot Z_1) + (-0{,}09 \cdot Z_2)$. Numărul de copii are o influență mai puternică asupra variabilei dependente decât nivelul de educație al soțului.

i. R = 0,5. R^2 = 0,25. Influența combinată a celor două variabile independente explică 25% din variația variabilei dependente.

Anexe

ANEXA A: Tabelul ariilor de sub curba normală standard



Z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0000	0040	0080	0120	0160	0199	0239	0279	0319	0359
0.1	0398	0438	0478	0517	0557	0596	0636	0675	0714	0753
0.2	0793	0832	0871	0910	0948	0987	1026	1064	1103	1141
0.3	1179	1217	1255	1293	1331	1368	1406	1443	1480	1517
0.4	1554	1591	1628	1664	1700	1736	1772	1808	1844	1879
0.5	1915	1950	1985	2019	2054	2088	2123	2157	2190	2224
0.6	2257	2291	2324	2357	2389	2422	2454	2486	2517	2549
0.7	2580	2611	2642	2673	2704	2734	2764	2794	2823	2852
0.8	2881	2910	2939	2967	2995	3023	3051	3078	3106	3133
0.9	3159	3186	3212	3238	3264	3289	3315	3340	3365	3389
1.0	3413	3438	3461	3485	3508	3531	3554	3577	3599	3621
1.1	3643	3665	3686	3708	3729	3749	3770	3790	3810	3830
1.2	3849	3869	3888	3907	3925	3944	3962	3980	3997	4015
1.3	4032	4049	4066	4082	4099	4115	4131	4147	4162	4177
1.4	4192	4207	4222	4236	4251	4265	4279	4292	4306	4319
1.5	4332	4345	4357	4370	4382	4394	4406	4418	4429	4441
1.6	4452	4463	4474	4484	4495	4505	4515	4525	4535	4545
1.7	4554	4564	4573	4582	4591	4599	4608	4616	4625	4633
1.8	4641	4649	4656	4664	4671	4678	4686	4693	4699	4706

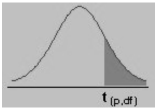
1.9	4713	4719	4726	4732	4738	4744	4750	4756	4761	4767
2.0	4772	4778	4783	4788	4793	4798	4803	4808	4812	4817
2.1	4821	4826	4830	4834	4838	4842	4846	4850	4854	4857
2.2	4861	4864	4868	4871	4875	4878	4881	4884	4887	4890
2.3	4893	4896	4898	4901	4904	4906	4909	4911	4913	4916
2.4	4918	4920	4922	4925	4927	4929	4931	4932	4934	4936
2.5	4938	4940	4941	4943	4945	4946	4948	4949	4951	4952
2.6	4953	4955	4956	4957	4959	4960	4961	4962	4963	4964
2.7	4965	4966	4967	4968	4969	4970	4971	4972	4973	4974
2.8	4974	4975	4976	4977	4977	4978	4979	4979	4980	4981
2.9	4981	4982	4982	4983	4984	4984	4985	4985	4986	4986
3.0	4987	4987	4987	4988	4988	4989	4989	4989	4990	4990

ANEXA B: Tabel cu numere aleatorii

23439	98507	39910	00560	32626	10389
54824	39825	41255	92292	42792	47044
08887	53462	27061	91124	00821	06739
36009	71613	59290	39307	81382	90065
11579	11866	23982	07184	48754	23730
15999	56909	63526	58442	65018	67216
35313	52502	20542	18161	08148	26274
71145	26478	57657	11259	23742	11130
01182	28841	63925	16987	45450	03024
24830	31913	92697	21464	76223	23050
70884	74438	63139	82700	80136	36995
23337	72693	56751	81454	87637	01545
72052	57078	62448	61957	47327	05131
63423	11919	81135	83185	79771	41291
13656	52075	72073	26395	87275	94669
28626	61547	71322	52318	44211	28168
36633	53025	00751	31951	17705	61394
40782	34030	43905	17686	64397	78999
32394	54527	45417	33384	57129	67003
93098	65060	34922	40062	07794	17866
98858	50208	54784	60012	48871	54379
77549	62988	98074	41326	09232	64635
31945	03282	24239	08562	22750	77805
25794	76169	01099	89443	00105	67125
97664	42607	74723	80536	20475	25996
90630	94635	10350	70824	90228	92753
05436	67370	23925	76439	08397	56952
19443	07008	27445	53390	37941	87853
79331	76925	44953	66790	90254	18858
00257	34057	77220	04875	93336	87945
54361	17404	21565	36900	84171	85462
92070	50459	46044	34841	41336	26351
94727	96386	47109	45193	81429	84494
07690	67800	72675	89012	68124	76345
32697	68932	49115	25655	12619	76233

76121	77280	02446	27539	46418	29301
10608	44906	63248	92769	42805	52649
95058	32147	46498	45746	69184	05758
38957	40597	88611	77664	47704	05859
67899	32902	27651	23971	38938	97347
14012	19793	01114	18777	82517	05695
00527	78748	12807	54566	71503	99322
11332	54185	24077	77453	21435	03715
94285	92230	50249	10439	74547	09974
97543	98153	31736	29688	20015	71747
61713	55274	83118	74813	22444	62979
40175	48507	97218	35700	52395	59131
51847	02577	84295	70263	75988	35299
82095	40603	53662	63581	35416	11192
91330	69915	50002	26539	22932	20736
71847	36502	81114	02923	10504	70523
36032	32799	20687	27313	29781	32904
08226	44723	52397	03984	24294	04990
70778	92734	43057	30797	82349	45916
07374	31187	09229	43326	49142	78238
58853	72101	81042	26493	49890	01389
25607	76309	26440	01548	28838	37129
87902	16117	47038	56639	87867	63608
03474	36702	64729	56504	29729	37936
37350	90069	78692	26169	57320	43231
15997	55786	12577	20265	79432	07787
70801	39564	70527	20008	70947	48602
66266	37262	62280	49922	48858	70309
59906	10852	82541	05267	05912	18046
67885	80107	75293	32814	72990	05873
27153	82956	58071	42062	76281	57111
15980	08517	92262	21835	35423	71902
72707	31535	93345	47664	95990	76161
05922	44245	70777	67070	92129	67925
63912	72108	84799	34600	51273	40910

ANEXA C: Tabelul valorilor critice ale distribuției *t*

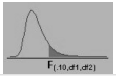


df\α	0.10	0.05	0.025	0.01	0.005	0.0005
1	3.077684	6.313752	12.70620	31.82052	63.65674	636.6192
2	1.885618	2.919986	4.30265	6.96456	9.92484	31.5991
3	1.637744	2.353363	3.18245	4.54070	5.84091	12.9240
4	1.533206	2.131847	2.77645	3.74695	4.60409	8.6103
5	1.475884	2.015048	2.57058	3.36493	4.03214	6.8688
6	1.439756	1.943180	2.44691	3.14267	3.70743	5.9588
7	1.414924	1.894579	2.36462	2.99795	3.49948	5.4079
8	1.396815	1.859548	2.30600	2.89646	3.35539	5.0413
9	1.383029	1.833113	2.26216	2.82144	3.24984	4.7809
10	1.372184	1.812461	2.22814	2.76377	3.16927	4.5869
11	1.363430	1.795885	2.20099	2.71808	3.10581	4.4370
12	1.356217	1.782288	2.17881	2.68100	3.05454	4.3178
13	1.350171	1.770933	2.16037	2.65031	3.01228	4.2208
14	1.345030	1.761310	2.14479	2.62449	2.97684	4.1405
15	1.340606	1.753050	2.13145	2.60248	2.94671	4.0728
16	1.336757	1.745884	2.11991	2.58349	2.92078	4.0150
17	1.333379	1.739607	2.10982	2.56693	2.89823	3.9651

18	1.330391	1.734064	2.10092	2.55238	2.87844	3.9216
19	1.327728	1.729133	2.09302	2.53948	2.86093	3.8834
df\α	**0.10**	**0.05**	**0.025**	**0.01**	**0.005**	**0.0005**
20	1.325341	1.724718	2.08596	2.52798	2.84534	3.8495
21	1.323188	1.720743	2.07961	2.51765	2.83136	3.8193
22	1.321237	1.717144	2.07387	2.50832	2.81876	3.7921
23	1.319460	1.713872	2.06866	2.49987	2.80734	3.7676
24	1.317836	1.710882	2.06390	2.49216	2.79694	3.7454
25	1.316345	1.708141	2.05954	2.48511	2.78744	3.7251
26	1.314972	1.705618	2.05553	2.47863	2.77871	3.7066
27	1.313703	1.703288	2.05183	2.47266	2.77068	3.6896
28	1.312527	1.701131	2.04841	2.46714	2.76326	3.6739
29	1.311434	1.699127	2.04523	2.46202	2.75639	3.6594
30	1.310415	1.697261	2.04227	2.45726	2.75000	3.6460
inf	1.281552	1.644854	1.95996	2.32635	2.57583	3.2905

ANEXA D: Tabelul valorilor critice ale distribuției *F*

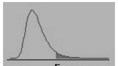
$\alpha = 0.10$



gl2/gl1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	INF
1	39.86346	49.50000	53.59324	55.83296	57.24008	58.20442	58.90595	59.43898	59.85759	60.19498	60.70521	61.22034	61.74029	62.00205	62.26497	62.52905	62.79428	63.06064	63.32812
2	8.52632	9.00000	9.16179	9.24342	9.29263	9.32553	9.34908	9.36677	9.38054	9.39157	9.40813	9.42471	9.44131	9.44962	9.45793	9.46624	9.47456	9.48289	9.49122
3	5.53832	5.46238	5.39077	5.34264	5.30916	5.28473	5.26619	5.25167	5.24000	5.23041	5.21562	5.20031	5.18448	5.17636	5.16811	5.15972	5.15119	5.14251	5.13370
4	4.54477	4.32456	4.19086	4.10725	4.05058	4.00975	3.97897	3.95494	3.93567	3.91988	3.89553	3.87036	3.84434	3.83099	3.81742	3.80361	3.78957	3.77527	3.76073
5	4.06042	3.77972	3.61948	3.52020	3.45298	3.40451	3.36790	3.33928	3.31628	3.29740	3.26824	3.23801	3.20665	3.19052	3.17408	3.15732	3.14023	3.12279	3.10500
6	3.77595	3.46330	3.28876	3.18076	3.10751	3.05455	3.01446	2.98304	2.95774	2.93693	2.90472	2.87122	2.83634	2.81834	2.79996	2.78117	2.76195	2.74229	2.72216
7	3.58943	3.25744	3.07407	2.96053	2.88334	2.82739	2.78493	2.75158	2.72468	2.70251	2.66811	2.63223	2.59473	2.57533	2.55546	2.53510	2.51422	2.49279	2.47079
8	3.45792	3.11312	2.92380	2.80643	2.72645	2.66833	2.62413	2.58935	2.56124	2.53804	2.50196	2.46422	2.42464	2.40410	2.38302	2.36136	2.33910	2.31618	2.29257
9	3.36030	3.00645	2.81286	2.69268	2.61061	2.55086	2.50531	2.46941	2.44034	2.41632	2.37888	2.33962	2.29832	2.27683	2.25472	2.23196	2.20849	2.18427	2.15923
10	3.28502	2.92447	2.72767	2.60534	2.52164	2.46058	2.41397	2.37715	2.34731	2.32260	2.28405	2.24351	2.20074	2.17843	2.15543	2.13169	2.10716	2.08176	2.05542
11	3.22520	2.85951	2.66023	2.53619	2.45118	2.38907	2.34157	2.30400	2.27350	2.24823	2.20873	2.16709	2.12305	2.10001	2.07621	2.05161	2.02612	1.99965	1.97211
12	3.17655	2.80680	2.60552	2.48010	2.39402	2.33102	2.28278	2.24457	2.21352	2.18776	2.14744	2.10485	2.05968	2.03599	2.01149	1.98610	1.95973	1.93228	1.90361
13	3.13621	2.76317	2.56027	2.43371	2.34672	2.28298	2.23410	2.19535	2.16382	2.13763	2.09659	2.05316	2.00698	1.98272	1.95757	1.93147	1.90429	1.87591	1.84620
14	3.10221	2.72647	2.52222	2.39469	2.30694	2.24256	2.19313	2.15390	2.12195	2.09540	2.05371	2.00953	1.96245	1.93766	1.91193	1.88516	1.85723	1.82800	1.79728
15	3.07319	2.69517	2.48979	2.36143	2.27302	2.20808	2.15818	2.11853	2.08621	2.05932	2.01707	1.97222	1.92431	1.89904	1.87277	1.84539	1.81676	1.78672	1.75505
16	3.04811	2.66817	2.46181	2.33274	2.24376	2.17833	2.12800	2.08798	2.05533	2.02815	1.98539	1.93992	1.89127	1.86556	1.83879	1.81084	1.78156	1.75075	1.71817

17	3.02623	2.64464	2.43743	2.30775	2.21825	2.15239	2.10169	2.06134	2.02839	2.00094	1.95772	1.91169	1.86236	1.83624	1.80901	1.78053	1.75063	1.71909	1.68564
gl2/gl1	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**12**	**15**	**20**	**24**	**30**	**40**	**60**	**120**	**INF**
18	3.00698	2.62395	2.41601	2.28577	2.19583	2.12958	2.07854	2.03789	2.00467	1.97698	1.93334	1.88681	1.83685	1.81035	1.78269	1.75371	1.72322	1.69099	1.65671
19	2.98990	2.60561	2.39702	2.26630	2.17596	2.10936	2.05802	2.01710	1.98364	1.95573	1.91170	1.86471	1.81416	1.78731	1.75924	1.72979	1.69876	1.66587	1.63077
20	2.97465	2.58925	2.38009	2.24893	2.15823	2.09132	2.03970	1.99853	1.96485	1.93674	1.89236	1.84494	1.79384	1.76667	1.73822	1.70833	1.67678	1.64326	1.60738
21	2.96096	2.57457	2.36489	2.23334	2.14231	2.07512	2.02325	1.98186	1.94797	1.91967	1.87497	1.82715	1.77555	1.74807	1.71927	1.68896	1.65691	1.62278	1.58615
22	2.94858	2.56131	2.35117	2.21927	2.12794	2.06050	2.00840	1.96680	1.93273	1.90425	1.85925	1.81106	1.75899	1.73122	1.70208	1.67138	1.63885	1.60415	1.56678
23	2.93736	2.54929	2.33873	2.20651	2.11491	2.04723	1.99492	1.95312	1.91888	1.89025	1.84497	1.79643	1.74392	1.71588	1.68643	1.65535	1.62237	1.58711	1.54903
24	2.92712	2.53833	2.32739	2.19488	2.10303	2.03513	1.98263	1.94066	1.90625	1.87748	1.83194	1.78308	1.73015	1.70185	1.67210	1.64067	1.60726	1.57146	1.53270
25	2.91774	2.52831	2.31702	2.18424	2.09216	2.02406	1.97138	1.92925	1.89469	1.86578	1.82000	1.77083	1.71752	1.68898	1.65895	1.62718	1.59335	1.55703	1.51760
26	2.90913	2.51910	2.30749	2.17447	2.08218	2.01389	1.96104	1.91876	1.88407	1.85503	1.80902	1.75957	1.70589	1.67712	1.64682	1.61472	1.58050	1.54368	1.50360
27	2.90119	2.51061	2.29871	2.16546	2.07298	2.00452	1.95151	1.90909	1.87427	1.84511	1.79889	1.74917	1.69514	1.66616	1.63560	1.60320	1.56859	1.53129	1.49057
28	2.89385	2.50276	2.29060	2.15714	2.06447	1.99585	1.94270	1.90014	1.86520	1.83593	1.78951	1.73954	1.68519	1.65600	1.62519	1.59250	1.55753	1.51976	1.47841
29	2.88703	2.49548	2.28307	2.14941	2.05658	1.98781	1.93452	1.89184	1.85679	1.82741	1.78081	1.73060	1.67593	1.64655	1.61551	1.58253	1.54721	1.50899	1.46704
30	2.88069	2.48872	2.27607	2.14223	2.04925	1.98033	1.92692	1.88412	1.84896	1.81949	1.77270	1.72227	1.66731	1.63774	1.60648	1.57323	1.53757	1.49891	1.45636
40	2.83535	2.44037	2.22609	2.09095	1.99682	1.92688	1.87252	1.82886	1.79290	1.76269	1.71456	1.66241	1.60515	1.57411	1.54108	1.50562	1.46716	1.42476	1.37691
60	2.79107	2.39325	2.17741	2.04099	1.94571	1.87472	1.81939	1.77483	1.73802	1.70701	1.65743	1.60337	1.54349	1.51072	1.47554	1.43734	1.39520	1.34757	1.29146
120	2.74781	2.34734	2.12999	1.99230	1.89587	1.82381	1.76748	1.72196	1.68425	1.65238	1.60120	1.54500	1.48207	1.44723	1.40938	1.36760	1.32034	1.26457	1.19256
inf	2.70554	2.30259	2.08380	1.94486	1.84727	1.77411	1.71672	1.67020	1.63152	1.59872	1.54578	1.48714	1.42060	1.38318	1.34187	1.29513	1.23995	1.16860	1.00000

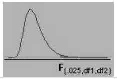
$\alpha = 0.05$



gl2/gl1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	INF
1	161.4476	199.5000	215.7073	224.5832	230.1619	233.9860	236.7684	238.8827	240.5433	241.8817	243.9060	245.9499	248.0131	249.0518	250.0951	251.1432	252.1957	253.2529	254.3144
2	18.5128	19.0000	19.1643	19.2468	19.2964	19.3295	19.3532	19.3710	19.3848	19.3959	19.4125	19.4291	19.4458	19.4541	19.4624	19.4707	19.4791	19.4874	19.4957
3	10.1280	9.5521	9.2766	9.1172	9.0135	8.9406	8.8867	8.8452	8.8123	8.7855	8.7446	8.7029	8.6602	8.6385	8.6166	8.5944	8.5720	8.5494	8.5264
4	7.7086	6.9443	6.5914	6.3882	6.2561	6.1631	6.0942	6.0410	5.9988	5.9644	5.9117	5.8578	5.8025	5.7744	5.7459	5.7170	5.6877	5.6581	5.6281
5	6.6079	5.7861	5.4095	5.1922	5.0503	4.9503	4.8759	4.8183	4.7725	4.7351	4.6777	4.6188	4.5581	4.5272	4.4957	4.4638	4.4314	4.3985	4.3650
6	5.9874	5.1433	4.7571	4.5337	4.3874	4.2839	4.2067	4.1468	4.0990	4.0600	3.9999	3.9381	3.8742	3.8415	3.8082	3.7743	3.7398	3.7047	3.6689
7	5.5914	4.7374	4.3468	4.1203	3.9715	3.8660	3.7870	3.7257	3.6767	3.6365	3.5747	3.5107	3.4445	3.4105	3.3758	3.3404	3.3043	3.2674	3.2298
8	5.3177	4.4590	4.0662	3.8379	3.6875	3.5806	3.5005	3.4381	3.3881	3.3472	3.2839	3.2184	3.1503	3.1152	3.0794	3.0428	3.0053	2.9669	2.9276
9	5.1174	4.2565	3.8625	3.6331	3.4817	3.3738	3.2927	3.2296	3.1789	3.1373	3.0729	3.0061	2.9365	2.9005	2.8637	2.8259	2.7872	2.7475	2.7067
10	4.9646	4.1028	3.7083	3.4780	3.3258	3.2172	3.1355	3.0717	3.0204	2.9782	2.9130	2.8450	2.7740	2.7372	2.6996	2.6609	2.6211	2.5801	2.5379
11	4.8443	3.9823	3.5874	3.3567	3.2039	3.0946	3.0123	2.9480	2.8962	2.8536	2.7876	2.7186	2.6464	2.6090	2.5705	2.5309	2.4901	2.4480	2.4045
12	4.7472	3.8853	3.4903	3.2592	3.1059	2.9961	2.9134	2.8486	2.7964	2.7534	2.6866	2.6169	2.5436	2.5055	2.4663	2.4259	2.3842	2.3410	2.2962
13	4.6672	3.8056	3.4105	3.1791	3.0254	2.9153	2.8321	2.7669	2.7144	2.6710	2.6037	2.5331	2.4589	2.4202	2.3803	2.3392	2.2966	2.2524	2.2064
14	4.6001	3.7389	3.3439	3.1122	2.9582	2.8477	2.7642	2.6987	2.6458	2.6022	2.5342	2.4630	2.3879	2.3487	2.3082	2.2664	2.2229	2.1778	2.1307
15	4.5431	3.6823	3.2874	3.0556	2.9013	2.7905	2.7066	2.6408	2.5876	2.5437	2.4753	2.4034	2.3275	2.2878	2.2468	2.2043	2.1601	2.1141	2.0658
16	4.4940	3.6337	3.2389	3.0069	2.8524	2.7413	2.6572	2.5911	2.5377	2.4935	2.4247	2.3522	2.2756	2.2354	2.1938	2.1507	2.1058	2.0589	2.0096
17	4.4513	3.5915	3.1968	2.9647	2.8100	2.6987	2.6143	2.5480	2.4943	2.4499	2.3807	2.3077	2.2304	2.1898	2.1477	2.1040	2.0584	2.0107	1.9604
18	4.4139	3.5546	3.1599	2.9277	2.7729	2.6613	2.5767	2.5102	2.4563	2.4117	2.3421	2.2686	2.1906	2.1497	2.1071	2.0629	2.0166	1.9681	1.9168

gl2/gl1	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**12**	**15**	**20**	**24**	**30**	**40**	**60**	**120**	**INF**
19	4.3807	3.5219	3.1274	2.8951	2.7401	2.6283	2.5435	2.4768	2.4227	2.3779	2.3080	2.2341	2.1555	2.1141	2.0712	2.0264	1.9795	1.9302	1.8780
20	4.3512	3.4928	3.0984	2.8661	2.7109	2.5990	2.5140	2.4471	2.3928	2.3479	2.2776	2.2033	2.1242	2.0825	2.0391	1.9938	1.9464	1.8963	1.8432
21	4.3248	3.4668	3.0725	2.8401	2.6848	2.5727	2.4876	2.4205	2.3660	2.3210	2.2504	2.1757	2.0960	2.0540	2.0102	1.9645	1.9165	1.8657	1.8117
22	4.3009	3.4434	3.0491	2.8167	2.6613	2.5491	2.4638	2.3965	2.3419	2.2967	2.2258	2.1508	2.0707	2.0283	1.9842	1.9380	1.8894	1.8380	1.7831
23	4.2793	3.4221	3.0280	2.7955	2.6400	2.5277	2.4422	2.3748	2.3201	2.2747	2.2036	2.1282	2.0476	2.0050	1.9605	1.9139	1.8648	1.8128	1.7570
24	4.2597	3.4028	3.0088	2.7763	2.6207	2.5082	2.4226	2.3551	2.3002	2.2547	2.1834	2.1077	2.0267	1.9838	1.9390	1.8920	1.8424	1.7896	1.7330
25	4.2417	3.3852	2.9912	2.7587	2.6030	2.4904	2.4047	2.3371	2.2821	2.2365	2.1649	2.0889	2.0075	1.9643	1.9192	1.8718	1.8217	1.7684	1.7110
26	4.2252	3.3690	2.9752	2.7426	2.5868	2.4741	2.3883	2.3205	2.2655	2.2197	2.1479	2.0716	1.9898	1.9464	1.9010	1.8533	1.8027	1.7488	1.6906
27	4.2100	3.3541	2.9604	2.7278	2.5719	2.4591	2.3732	2.3053	2.2501	2.2043	2.1323	2.0558	1.9736	1.9299	1.8842	1.8361	1.7851	1.7306	1.6717
28	4.1960	3.3404	2.9467	2.7141	2.5581	2.4453	2.3593	2.2913	2.2360	2.1900	2.1179	2.0411	1.9586	1.9147	1.8687	1.8203	1.7689	1.7138	1.6541
29	4.1830	3.3277	2.9340	2.7014	2.5454	2.4324	2.3463	2.2783	2.2229	2.1768	2.1045	2.0275	1.9446	1.9005	1.8543	1.8055	1.7537	1.6981	1.6376
30	4.1709	3.3158	2.9223	2.6896	2.5336	2.4205	2.3343	2.2662	2.2107	2.1646	2.0921	2.0148	1.9317	1.8874	1.8409	1.7918	1.7396	1.6835	1.6223
40	4.0847	3.2317	2.8387	2.6060	2.4495	2.3359	2.2490	2.1802	2.1240	2.0772	2.0035	1.9245	1.8389	1.7929	1.7444	1.6928	1.6373	1.5766	1.5089
60	4.0012	3.1504	2.7581	2.5252	2.3683	2.2541	2.1665	2.0970	2.0401	1.9926	1.9174	1.8364	1.7480	1.7001	1.6491	1.5943	1.5343	1.4673	1.3893
120	3.9201	3.0718	2.6802	2.4472	2.2899	2.1750	2.0868	2.0164	1.9588	1.9105	1.8337	1.7505	1.6587	1.6084	1.5543	1.4952	1.4290	1.3519	1.2539
inf	3.8415	2.9957	2.6049	2.3719	2.2141	2.0986	2.0096	1.9384	1.8799	1.8307	1.7522	1.6664	1.5705	1.5173	1.4591	1.3940	1.3180	1.2214	1.0000

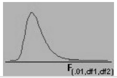
$\alpha = 0.025$



gl2/gl1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	INF
1	647.7890	799.5000	864.1630	899.5833	921.8479	937.1111	948.2169	956.6562	963.2846	968.6274	976.7079	984.8668	993.1028	997.2492	1001.414	1005.598	1009.800	1014.020	1018.258
2	38.5063	39.0000	39.1655	39.2484	39.2982	39.3315	39.3552	39.3730	39.3869	39.3980	39.4146	39.4313	39.4479	39.4562	39.465	39.473	39.481	39.490	39.498
3	17.4434	16.0441	15.4392	15.1010	14.8848	14.7347	14.6244	14.5399	14.4731	14.4189	14.3366	14.2527	14.1674	14.1241	14.081	14.037	13.992	13.947	13.902
4	12.2179	10.6491	9.9792	9.6045	9.3645	9.1973	9.0741	8.9796	8.9047	8.8439	8.7512	8.6565	8.5599	8.5109	8.461	8.411	8.360	8.309	8.257
5	10.0070	8.4336	7.7636	7.3879	7.1464	6.9777	6.8531	6.7572	6.6811	6.6192	6.5245	6.4277	6.3286	6.2780	6.227	6.175	6.123	6.069	6.015
6	8.8131	7.2599	6.5988	6.2272	5.9876	5.8198	5.6955	5.5996	5.5234	5.4613	5.3662	5.2687	5.1684	5.1172	5.065	5.012	4.959	4.904	4.849
7	8.0727	6.5415	5.8898	5.5226	5.2852	5.1186	4.9949	4.8993	4.8232	4.7611	4.6658	4.5678	4.4667	4.4150	4.362	4.309	4.254	4.199	4.142
8	7.5709	6.0595	5.4160	5.0526	4.8173	4.6517	4.5286	4.4333	4.3572	4.2951	4.1997	4.1012	3.9995	3.9472	3.894	3.840	3.784	3.728	3.670
9	7.2093	5.7147	5.0781	4.7181	4.4844	4.3197	4.1970	4.1020	4.0260	3.9639	3.8682	3.7694	3.6669	3.6142	3.560	3.505	3.449	3.392	3.333
10	6.9367	5.4564	4.8256	4.4683	4.2361	4.0721	3.9498	3.8549	3.7790	3.7168	3.6209	3.5217	3.4185	3.3654	3.311	3.255	3.198	3.140	3.080
11	6.7241	5.2559	4.6300	4.2751	4.0440	3.8807	3.7586	3.6638	3.5879	3.5257	3.4296	3.3299	3.2261	3.1725	3.118	3.061	3.004	2.944	2.883
12	6.5538	5.0959	4.4742	4.1212	3.8911	3.7283	3.6065	3.5118	3.4358	3.3736	3.2773	3.1772	3.0728	3.0187	2.963	2.906	2.848	2.787	2.725
13	6.4143	4.9653	4.3472	3.9959	3.7667	3.6043	3.4827	3.3880	3.3120	3.2497	3.1532	3.0527	2.9477	2.8932	2.837	2.780	2.720	2.659	2.595
14	6.2979	4.8567	4.2417	3.8919	3.6634	3.5014	3.3799	3.2853	3.2093	3.1469	3.0502	2.9493	2.8437	2.7888	2.732	2.674	2.614	2.552	2.487
15	6.1995	4.7650	4.1528	3.8043	3.5764	3.4147	3.2934	3.1987	3.1227	3.0602	2.9633	2.8621	2.7559	2.7006	2.644	2.585	2.524	2.461	2.395
16	6.1151	4.6867	4.0768	3.7294	3.5021	3.3406	3.2194	3.1248	3.0488	2.9862	2.8890	2.7875	2.6808	2.6252	2.568	2.509	2.447	2.383	2.316
17	6.0420	4.6189	4.0112	3.6648	3.4379	3.2767	3.1556	3.0610	2.9849	2.9222	2.8249	2.7230	2.6158	2.5598	2.502	2.442	2.380	2.315	2.247
18	5.9781	4.5597	3.9539	3.6083	3.3820	3.2209	3.0999	3.0053	2.9291	2.8664	2.7689	2.6667	2.5590	2.5027	2.445	2.384	2.321	2.256	2.187

gl2/gl1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	INF
19	5.9216	4.5075	3.9034	3.5587	3.3327	3.1718	3.0509	2.9563	2.8801	2.8172	2.7196	2.6171	2.5089	2.4523	2.394	2.333	2.270	2.203	2.133
20	5.8715	4.4613	3.8587	3.5147	3.2891	3.1283	3.0074	2.9128	2.8365	2.7737	2.6758	2.5731	2.4645	2.4076	2.349	2.287	2.223	2.156	2.085
21	5.8266	4.4199	3.8188	3.4754	3.2501	3.0895	2.9686	2.8740	2.7977	2.7348	2.6368	2.5338	2.4247	2.3675	2.308	2.246	2.182	2.114	2.042
22	5.7863	4.3828	3.7829	3.4401	3.2151	3.0546	2.9338	2.8392	2.7628	2.6998	2.6017	2.4984	2.3890	2.3315	2.272	2.210	2.145	2.076	2.003
23	5.7498	4.3492	3.7505	3.4083	3.1835	3.0232	2.9023	2.8077	2.7313	2.6682	2.5699	2.4665	2.3567	2.2989	2.239	2.176	2.111	2.041	1.968
24	5.7166	4.3187	3.7211	3.3794	3.1548	2.9946	2.8738	2.7791	2.7027	2.6396	2.5411	2.4374	2.3273	2.2693	2.209	2.146	2.080	2.010	1.935
25	5.6864	4.2909	3.6943	3.3530	3.1287	2.9685	2.8478	2.7531	2.6766	2.6135	2.5149	2.4110	2.3005	2.2422	2.182	2.118	2.052	1.981	1.906
26	5.6586	4.2655	3.6697	3.3289	3.1048	2.9447	2.8240	2.7293	2.6528	2.5896	2.4908	2.3867	2.2759	2.2174	2.157	2.093	2.026	1.954	1.878
27	5.6331	4.2421	3.6472	3.3067	3.0828	2.9228	2.8021	2.7074	2.6309	2.5676	2.4688	2.3644	2.2533	2.1946	2.133	2.069	2.002	1.930	1.853
28	5.6096	4.2205	3.6264	3.2863	3.0626	2.9027	2.7820	2.6872	2.6106	2.5473	2.4484	2.3438	2.2324	2.1735	2.112	2.048	1.980	1.907	1.829
29	5.5878	4.2006	3.6072	3.2674	3.0438	2.8840	2.7633	2.6686	2.5919	2.5286	2.4295	2.3248	2.2131	2.1540	2.092	2.028	1.959	1.886	1.807
30	5.5675	4.1821	3.5894	3.2499	3.0265	2.8667	2.7460	2.6513	2.5746	2.5112	2.4120	2.3072	2.1952	2.1359	2.074	2.009	1.940	1.866	1.787
40	5.4239	4.0510	3.4633	3.1261	2.9037	2.7444	2.6238	2.5289	2.4519	2.3882	2.2882	2.1819	2.0677	2.0069	1.943	1.875	1.803	1.724	1.637
60	5.2856	3.9253	3.3425	3.0077	2.7863	2.6274	2.5068	2.4117	2.3344	2.2702	2.1692	2.0613	1.9445	1.8817	1.815	1.744	1.667	1.581	1.482
120	5.1523	3.8046	3.2269	2.8943	2.6740	2.5154	2.3948	2.2994	2.2217	2.1570	2.0548	1.9450	1.8249	1.7597	1.690	1.614	1.530	1.433	1.310
inf	5.0239	3.6889	3.1161	2.7858	2.5665	2.4082	2.2875	2.1918	2.1136	2.0483	1.9447	1.8326	1.7085	1.6402	1.566	1.484	1.388	1.268	1.000

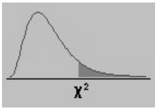
$\alpha = 0.01$



gl2/gl1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	INF
1	4052.181	4999.500	5403.352	5624.583	5763.650	5858.986	5928.356	5981.070	6022.473	6055.847	6106.321	6157.285	6208.730	6234.631	6260.649	6286.782	6313.030	6339.391	6365.864
2	98.503	99.000	99.166	99.249	99.299	99.333	99.356	99.374	99.388	99.399	99.416	99.433	99.449	99.458	99.466	99.474	99.482	99.491	99.499
3	34.116	30.817	29.457	28.710	28.237	27.911	27.672	27.489	27.345	27.229	27.052	26.872	26.690	26.598	26.505	26.411	26.316	26.221	26.125
4	21.198	18.000	16.694	15.977	15.522	15.207	14.976	14.799	14.659	14.546	14.374	14.198	14.020	13.929	13.838	13.745	13.652	13.558	13.463
5	16.258	13.274	12.060	11.392	10.967	10.672	10.456	10.289	10.158	10.051	9.888	9.722	9.553	9.466	9.379	9.291	9.202	9.112	9.020
6	13.745	10.925	9.780	9.148	8.746	8.466	8.260	8.102	7.976	7.874	7.718	7.559	7.396	7.313	7.229	7.143	7.057	6.969	6.880
7	12.246	9.547	8.451	7.847	7.460	7.191	6.993	6.840	6.719	6.620	6.469	6.314	6.155	6.074	5.992	5.908	5.824	5.737	5.650
8	11.259	8.649	7.591	7.006	6.632	6.371	6.178	6.029	5.911	5.814	5.667	5.515	5.359	5.279	5.198	5.116	5.032	4.946	4.859
9	10.561	8.022	6.992	6.422	6.057	5.802	5.613	5.467	5.351	5.257	5.111	4.962	4.808	4.729	4.649	4.567	4.483	4.398	4.311
10	10.044	7.559	6.552	5.994	5.636	5.386	5.200	5.057	4.942	4.849	4.706	4.558	4.405	4.327	4.247	4.165	4.082	3.996	3.909
11	9.646	7.206	6.217	5.668	5.316	5.069	4.886	4.744	4.632	4.539	4.397	4.251	4.099	4.021	3.941	3.860	3.776	3.690	3.602
12	9.330	6.927	5.953	5.412	5.064	4.821	4.640	4.499	4.388	4.296	4.155	4.010	3.858	3.780	3.701	3.619	3.535	3.449	3.361
13	9.074	6.701	5.739	5.205	4.862	4.620	4.441	4.302	4.191	4.100	3.960	3.815	3.665	3.587	3.507	3.425	3.341	3.255	3.165
14	8.862	6.515	5.564	5.035	4.695	4.456	4.278	4.140	4.030	3.939	3.800	3.656	3.505	3.427	3.348	3.266	3.181	3.094	3.004
15	8.683	6.359	5.417	4.893	4.556	4.318	4.142	4.004	3.895	3.805	3.666	3.522	3.372	3.294	3.214	3.132	3.047	2.959	2.868
16	8.531	6.226	5.292	4.773	4.437	4.202	4.026	3.890	3.780	3.691	3.553	3.409	3.259	3.181	3.101	3.018	2.933	2.845	2.753
17	8.400	6.112	5.185	4.669	4.336	4.102	3.927	3.791	3.682	3.593	3.455	3.312	3.162	3.084	3.003	2.920	2.835	2.746	2.653
18	8.285	6.013	5.092	4.579	4.248	4.015	3.841	3.705	3.597	3.508	3.371	3.227	3.077	2.999	2.919	2.835	2.749	2.660	2.566

gl2/gl1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	INF
19	8.185	5.926	5.010	4.500	4.171	3.939	3.765	3.631	3.523	3.434	3.297	3.153	3.003	2.925	2.844	2.761	2.674	2.584	2.489
20	8.096	5.849	4.938	4.431	4.103	3.871	3.699	3.564	3.457	3.368	3.231	3.088	2.938	2.859	2.778	2.695	2.608	2.517	2.421
21	8.017	5.780	4.874	4.369	4.042	3.812	3.640	3.506	3.398	3.310	3.173	3.030	2.880	2.801	2.720	2.636	2.548	2.457	2.360
22	7.945	5.719	4.817	4.313	3.988	3.758	3.587	3.453	3.346	3.258	3.121	2.978	2.827	2.749	2.667	2.583	2.495	2.403	2.305
23	7.881	5.664	4.765	4.264	3.939	3.710	3.539	3.406	3.299	3.211	3.074	2.931	2.781	2.702	2.620	2.535	2.447	2.354	2.256
24	7.823	5.614	4.718	4.218	3.895	3.667	3.496	3.363	3.256	3.168	3.032	2.889	2.738	2.659	2.577	2.492	2.403	2.310	2.211
25	7.770	5.568	4.675	4.177	3.855	3.627	3.457	3.324	3.217	3.129	2.993	2.850	2.699	2.620	2.538	2.453	2.364	2.270	2.169
26	7.721	5.526	4.637	4.140	3.818	3.591	3.421	3.288	3.182	3.094	2.958	2.815	2.664	2.585	2.503	2.417	2.327	2.233	2.131
27	7.677	5.488	4.601	4.106	3.785	3.558	3.388	3.256	3.149	3.062	2.926	2.783	2.632	2.552	2.470	2.384	2.294	2.198	2.097
28	7.636	5.453	4.568	4.074	3.754	3.528	3.358	3.226	3.120	3.032	2.896	2.753	2.602	2.522	2.440	2.354	2.263	2.167	2.064
29	7.598	5.420	4.538	4.045	3.725	3.499	3.330	3.198	3.092	3.005	2.868	2.726	2.574	2.495	2.412	2.325	2.234	2.138	2.034
30	7.562	5.390	4.510	4.018	3.699	3.473	3.304	3.173	3.067	2.979	2.843	2.700	2.549	2.469	2.386	2.299	2.208	2.111	2.006
40	7.314	5.179	4.313	3.828	3.514	3.291	3.124	2.993	2.888	2.801	2.665	2.522	2.369	2.288	2.203	2.114	2.019	1.917	1.805
60	7.077	4.977	4.126	3.649	3.339	3.119	2.953	2.823	2.718	2.632	2.496	2.352	2.198	2.115	2.028	1.936	1.836	1.726	1.601
120	6.851	4.787	3.949	3.480	3.174	2.956	2.792	2.663	2.559	2.472	2.336	2.192	2.035	1.950	1.860	1.763	1.656	1.533	1.381
inf	6.635	4.605	3.782	3.319	3.017	2.802	2.639	2.511	2.407	2.321	2.185	2.039	1.878	1.791	1.696	1.592	1.473	1.325	1.000

ANEXA E: Tabelul valorilor critice ale distribuției χ^2



gl\α	.100	.050	.025	.010	.005
1	2.70554	3.84146	5.02389	6.63490	7.87944
2	4.60517	5.99146	7.37776	9.21034	10.59663
3	6.25139	7.81473	9.34840	11.34487	12.83816
4	7.77944	9.48773	11.14329	13.27670	14.86026
5	9.23636	11.07050	12.83250	15.08627	16.74960
6	10.64464	12.59159	14.44938	16.81189	18.54758
7	12.01704	14.06714	16.01276	18.47531	20.27774
8	13.36157	15.50731	17.53455	20.09024	21.95495
9	14.68366	16.91898	19.02277	21.66599	23.58935
10	15.98718	18.30704	20.48318	23.20925	25.18818
11	17.27501	19.67514	21.92005	24.72497	26.75685
12	18.54935	21.02607	23.33666	26.21697	28.29952
13	19.81193	22.36203	24.73560	27.68825	29.81947
14	21.06414	23.68479	26.11895	29.14124	31.31935
15	22.30713	24.99579	27.48839	30.57791	32.80132
16	23.54183	26.29623	28.84535	31.99993	34.26719
17	24.76904	27.58711	30.19101	33.40866	35.71847
18	25.98942	28.86930	31.52638	34.80531	37.15645

19	27.20357	30.14353	32.85233	36.19087	38.58226
20	28.41198	31.41043	34.16961	37.56623	39.99685
21	29.61509	32.67057	35.47888	38.93217	41.40106
22	30.81328	33.92444	36.78071	40.28936	42.79565
23	32.00690	35.17246	38.07563	41.63840	44.18128
24	33.19624	36.41503	39.36408	42.97982	45.55851
25	34.38159	37.65248	40.64647	44.31410	46.92789
26	35.56317	38.88514	41.92317	45.64168	48.28988
27	36.74122	40.11327	43.19451	46.96294	49.64492
28	37.91592	41.33714	44.46079	48.27824	50.99338
29	39.08747	42.55697	45.72229	49.58788	52.33562
30	40.25602	43.77297	46.97924	50.89218	53.67196

ANEXA F: Tabelul valorilor critice pentru testul Mann–Whitney *U*

$\alpha = 0.025$, test unilateral												
n_1 \ n_2	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1												
2	0	0	0	1	1	1	1	1	2	2	2	2
3	2	3	3	4	4	5	5	6	6	7	7	8
4	4	5	6	7	8	9	10	11	11	12	13	13
5	7	8	9	11	12	13	14	15	17	18	19	20
6	10	11	13	14	16	17	19	21	22	24	25	27
7	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30	32	34
8	15	17	19	22	24	26	29	31	34	36	38	41
9	17	20	23	26	28	31	34	37	39	42	45	48
10	20	23	26	29	33	36	39	42	45	48	52	55
11	23	26	30	33	37	40	44	47	51	55	58	62
12	26	29	33	37	41	45	49	53	57	61	65	69
13	28	33	37	41	45	50	54	59	63	67	72	76
14	31	36	40	45	50	55	59	64	67	74	78	83
15	34	39	44	49	54	59	64	70	75	80	85	90
16	37	42	47	53	59	64	70	75	81	86	92	98
17	39	45	51	57	63	67	75	81	87	93	99	105
18	42	48	55	61	67	74	80	86	93	99	106	112
19	45	52	58	65	72	78	85	92	99	106	113	119
20	48	55	62	69	76	83	90	98	105	112	119	127

α = 0.05, test unilateral												
n_1 \ n_2	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1											0	0
2	1	1	1	2	2	2	3	3	3	4	4	4
3	3	4	5	5	6	7	7	8	9	9	10	11
4	6	7	8	9	10	11	12	14	15	16	17	18
5	9	11	12	13	15	16	18	19	20	22	23	25
6	12	14	16	17	19	21	23	25	26	28	30	32
7	15	17	19	21	24	26	28	30	33	35	37	39
8	18	20	23	26	28	31	33	36	39	41	44	47
9	21	24	27	30	33	36	39	42	45	48	51	54
10	24	27	31	34	37	41	44	48	51	55	58	62
11	27	31	34	38	42	46	50	54	57	61	65	69
12	30	34	38	42	47	51	55	60	64	68	72	77
13	33	37	42	47	51	56	61	65	70	75	80	84
14	36	41	46	51	56	61	66	71	77	82	87	92
15	39	44	50	55	61	66	72	77	83	88	94	100
16	42	48	54	60	65	71	77	83	89	95	101	107
17	45	51	57	64	70	77	83	89	96	102	109	115
18	48	55	61	68	75	82	88	95	102	109	116	123
19	51	58	65	72	80	87	94	101	109	116	123	130
20	54	62	69	77	84	92	100	107	115	123	130	138

ANEXA G: Tabelul valorilor critice pentru testul Wilcoxon *T*

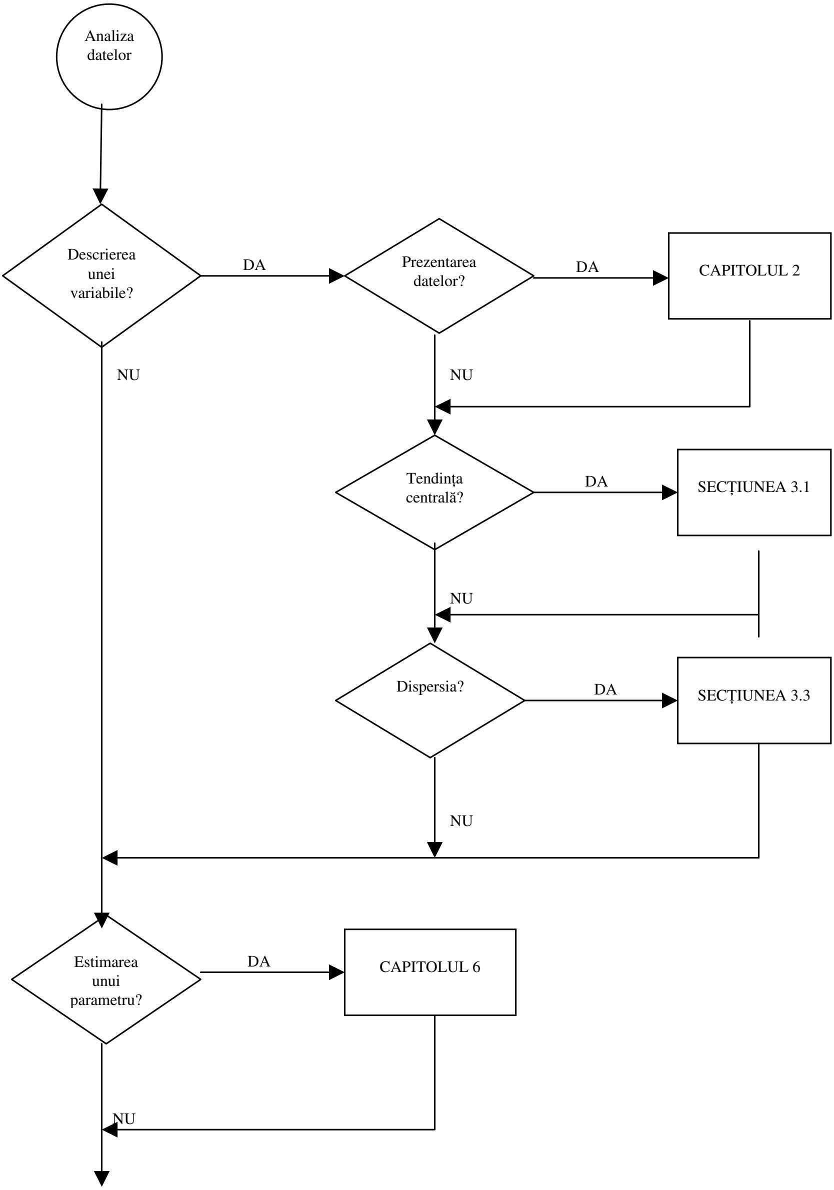
Unilateral	Bilateral	n = 5	n = 6	n = 7	n = 8	n = 9	n = 10
0.05	0.10	1	2	4	6	8	11
0.025	0.05		1	2	4	6	8
0.01	0.02			0	2	3	5
0.005	0.01				0	2	3
		n = 11	n = 12	n = 13	n = 14	n = 15	n = 16
0.05	0.10	14	17	21	26	30	36
0.025	0.05	11	14	17	21	25	30
0.01	0.02	7	10	13	16	20	24
0.005	0.01	5	7	10	13	16	19
		n = 17	n = 18	n = 19	n = 20	n = 21	n = 22
0.05	0.10	41	47	54	60	68	75
0.025	0.05	35	40	46	52	59	66

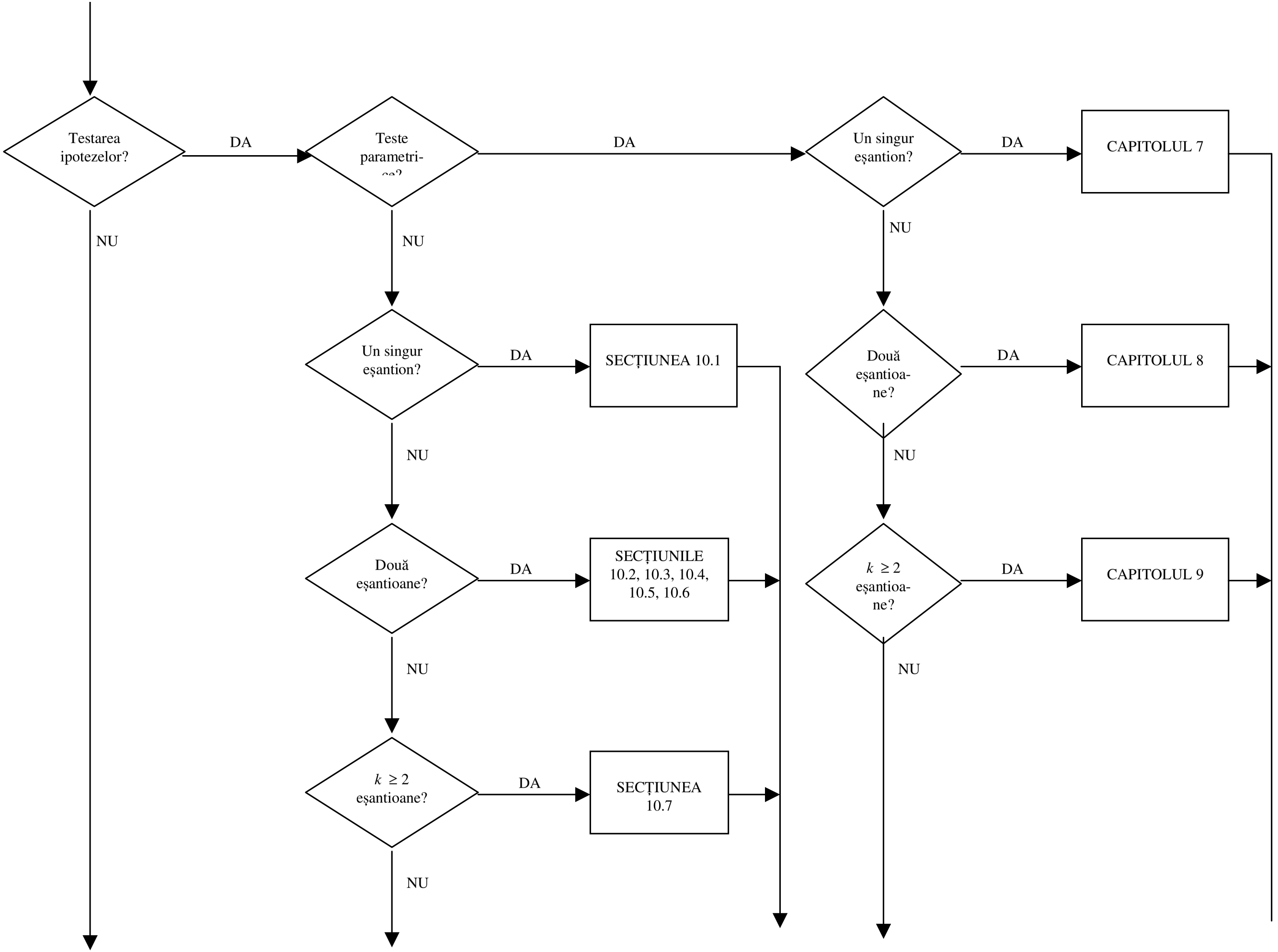
0.01	0.02	28	33	38	43	49	56
0.005	0.01	23	28	32	37	43	49
		n = 23	n = 24	n = 25	n = 26	n = 27	n = 28
=0.05	=0.10	83	92	101	110	120	130
=0.025	=0.05	73	81	90	98	107	117
=0.01	=0.02	62	69	77	85	93	102
=0.005	=0.01	55	68	68	76	84	92

ANEXA H: Tabelul valorilor critice pentru ρ_s

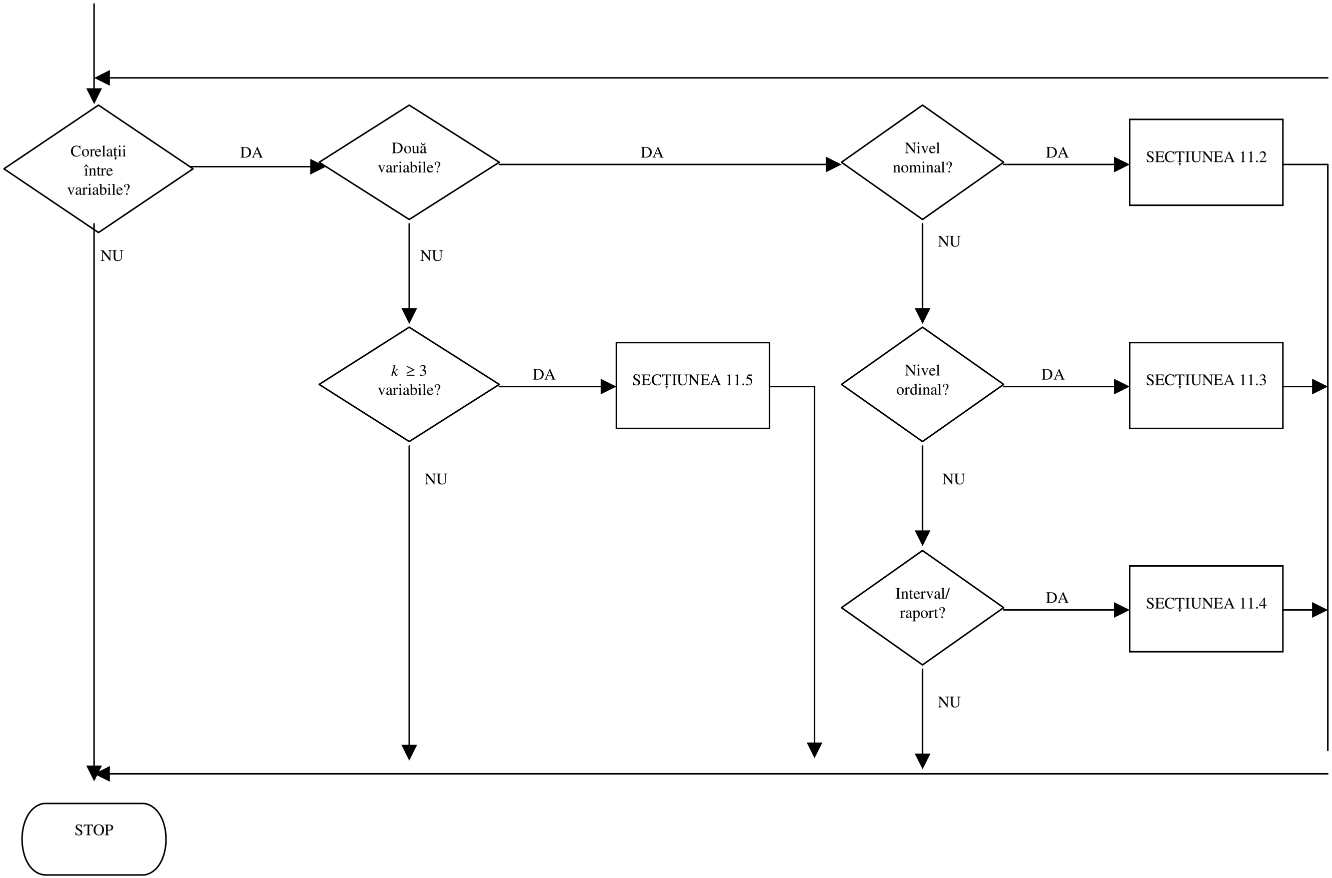
n	Nivelul α		
	0.10	0.05	0.01
5	0.90	1.00	–
6	0.83	0.89	1.00
7	0.71	0.79	0.93
8	0.64	0.74	0.88
9	0.60	0.68	0.83
10	0.56	0.65	0.79
11	0.52	0.61	0.77
12	0.50	0.59	0.75
13	0.47	0.56	0.71
14	0.46	0.54	0.69
15	0.44	0.52	0.66
16	0.42	0.51	0.64
17	0.41	0.49	0.62
18	0.40	0.48	0.61
19	0.39	0.46	0.60
20	0.38	0.45	0.58
21	0.37	0.44	0.56
22	0.36	0.43	0.55
23	0.35	0.42	0.54
24	0.34	0.41	0.53
25	0.34	0.40	0.52
26	0.33	0.39	0.51
27	0.32	0.38	0.50
28	0.32	0.38	0.49
29	0.31	0.37	0.48
30	0.31	0.36	0.47

ANEXA I: Ghid de utilizare a principalelor tehnici statistice





Testarea ipotezelor?
DA
NU
Teste parametri-ce?
DA
NU
Un singur eșantion?
DA
NU
CAPITOLUL 7
Un singur eșantion?
DA
NU
SECȚIUNEA 10.1
Două eșantioa-ne?
DA
NU
CAPITOLUL 8
Două eșantioane?
DA
NU
SECȚIUNILE 10.2, 10.3, 10.4, 10.5, 10.6
k ≥ 2 eșantioa-ne?
DA
NU
CAPITOLUL 9
k ≥ 2 eșantioane?
DA
NU
SECȚIUNEA 10.7



Corelații
între
variabile?
DA
NU
Două
variabile?
DA
NU
Nivel
nominal?
DA
SECȚIUNEA 11.2
NU
k ≥ 3
variabile?
DA
SECȚIUNEA 11.5
NU
Nivel
ordinal?
DA
SECȚIUNEA 11.3
NU
Interval/
raport?
DA
SECȚIUNEA 11.4
NU
STOP